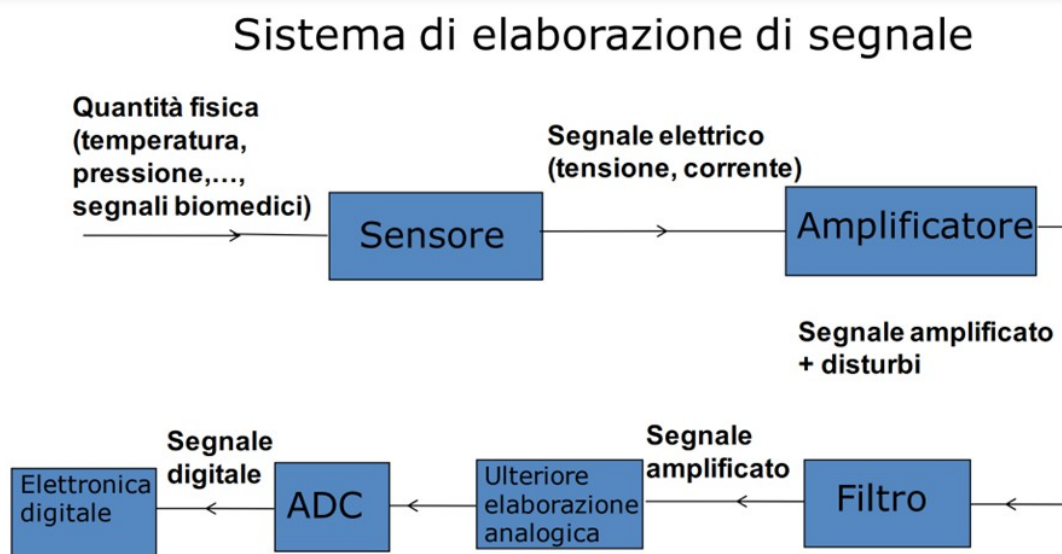
Elettronica

Esame: 2 ore scritto con domande (5/6) ed esercizi

Sistema di elaborazione dei segnali:

- All'ingresso c'è una grandezza fisica di tipo biomedico (temperatura, pressione)

  - Questa grandezza fisica entra in ingresso nel **sensore** che converte la grandezza fisica in una grandezza di tipo elettrico (tensione, corrente, carica) oppure nella variazione di un parametro elettrico (resistenza capacità e induttanza)

  - Due operazioni :

amplificazioni e **filtraggio**

il segnale che arriva in ingresso è molto piccolo che da solo sarebbe disturbato dall'esterno perciò questi segnali devono essere amplificati.

Successivamente avviene il filtraggio ovvero l'eliminazione dei dati che non interessano attraverso la frequenza

  - il segnale analogico viene convertito in segnale digitale grazie all'**ADC** ovvero un convertitore da analogico a digitale (numerico)

- Alcuni sistemi poi intervengono direttamente sul paziente in base al tipo di segnale digitale che hanno ricevuto.

Segnale analogico : continuo in ampiezza e nel tempo. Continuo significa che può assumere un qualunque valore ad un qualunque istante . in un grafico è rappresentato da una funzione continua.

Segnale digitale: può assumere solo un numero limitato di valori di ampiezza in un determinato range di tempo

Quindi discontinuo/discreto in ampiezza e nel tempo e in un grafico è rappresentato da soli punti.

I bit sono i valori di ampiezza lungo l'asse y

Tutto questo avviene perché attraverso il codice binario è possibile effettuare conti bisogna tener conto però che passando da un segnale analogico ad un segnale digitale si ha perdita di una parte delle informazioni

MICROELETTRONICA

Micro indica la dimensione tipica dei circuiti realizzati di ordine di 10^-6

AFE frontiera di tipo analogico

Una volta digitalizzato il segnale può essere salvato in una memoria, visualizzare il risultato su un display, inoltre è possibile che emetta suoni o segnali. Può avvenire una trasmissione via cavo (USB ethernet) oppure via radio (bluetooth ,)

l'elettronica può essere alimentata o dalle batterie o da un'alimentazione di rete) l'alimentazione elettrica viene spesso spenta durante l'analisi su un paziente in quanto la tensione o la frequenza potrebbe non essere tollerabile dal paziente.

Elettronica integrata

L'elettronica integrata parte dai dei dischi di silicio sul quale vengono realizzati dei circuiti elettrici

La microelettronica assieme alla sensoristica ha permesso l'evoluzione

Esempio tag rfit , ricarica wireless, sensore di radon

Piattaforma inerziale : monitora il movimento di un arto e ricostruisce il movimento dello scheletro trasmettendo le coordinate spaziali ad un computer si monitora un paziente

Fotopletismografia

Controllo del ritmo cardiaco

Un led e un fotodiodo che misura la quantità di luce. Appoggiando il dito sul led il flusso sanguigno all'interno del dito

Legge di moore

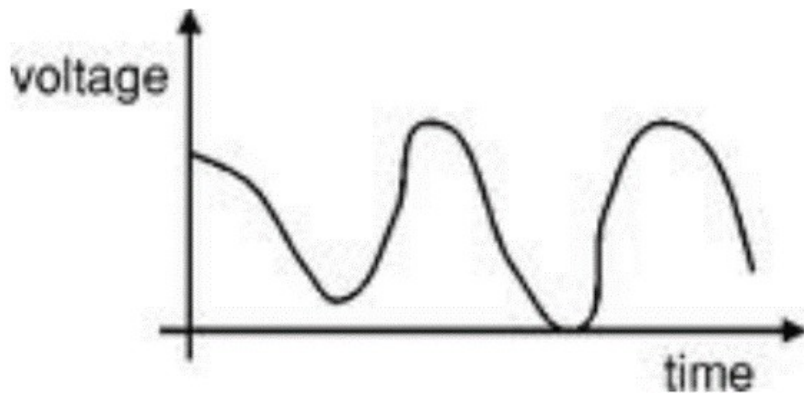
Il numero di transistor raddoppia ogni tre anni.

I biopotenziali possono essere alterati

Inoltre i gli oggetti

Tessuti intelligenti possiedo dei circuiti interni

un sensore va a convertire una quantità fisica (normalmente sensore di tensione)

in uscita dal sensore abbiamo un segnale analogico ovvero un segnale in tensione o in corrente variabile nel tempo in modo continuo rispetto all'ampiezza (tensione) e tempo.

mentre i segnali digitale sono definiti in un istante preciso di tempo ad una precisa ampiezza.

segnali endogeni : segnali che provengono da processi fisiologici degli esseri viventi (ECG   attività cardiaca). sono generati da una variazione di potenziale (tensione) a capo della membrana della cellula soprattutto sulle cellule eccitabili e letta poi attraverso degli elettrodi.

c'è una fase di polarizzazione e una fase di depolarizzazione grazie allo scambio di ioni che crea la variazioni di potenziale

questi variazione di tensione deve essere amplificata

segnali esogeni : sono applicate dall'esterno per effettuare misure interne (ultrasuoni, raggi X)

amplificatori : oggetto che riceve in ingresso una tensione elettrica (piccola) e produce una tensione in uscita (grande)

$$V_{out} = A \cdot V_{in}$$

A >1

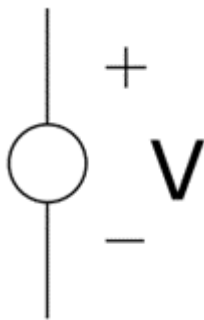
il convertitore analogico-digitale : trasforma il segnale analogico in digitale (binario)

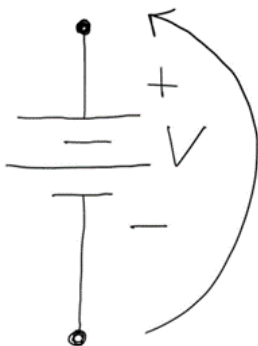
segnale digitale : può assumere solo valori 0 o 1

quantità fondamentali

- **tensione** : misura l'energia che serve per muovere una carica dal potenziale più basso al potenziale più alto (volt V)

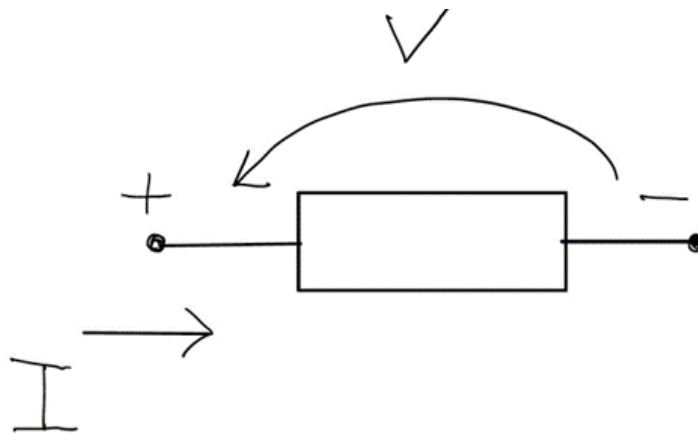
in elettronica si tende a parlare di tensione in un solo punto (anche se la tensione è la differenza di potenziale tra due punti) questo perché si fa riferimento ad un punto comune a tutto il circuito (massa, terra) che è pari a 0 volt

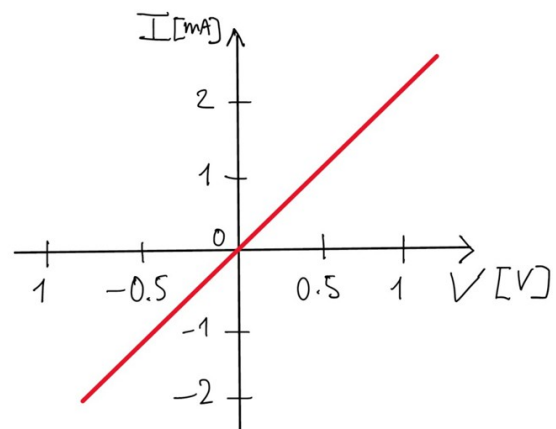
generatore tensione

se la tensione varia nel tempo è detto generatore di segnale

se la tensione è continua nel tempo il generatore di tensione è detto batteria

il generatore di tensione è in grado di darci una tensione a prescindere dalla corrente che lo attraversa

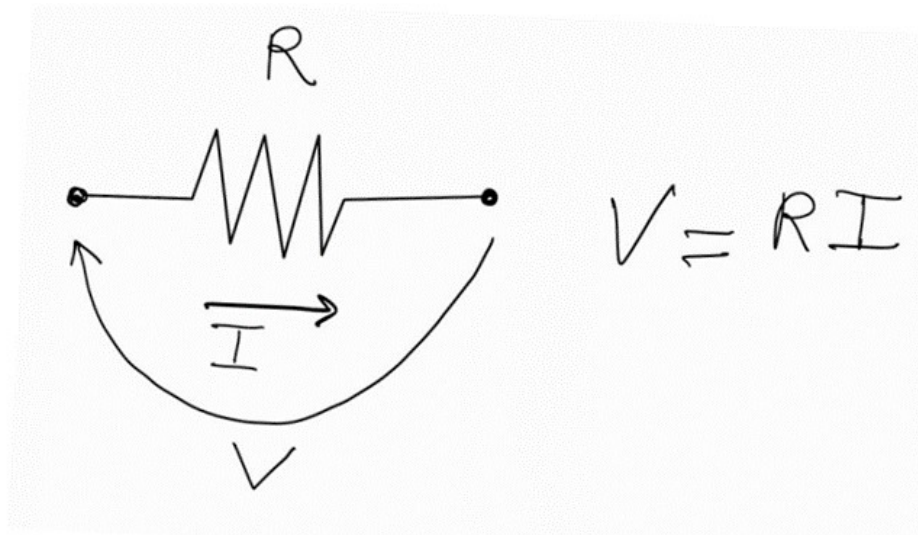
- **corrente** : flusso di cariche nell'unità di tempo (ampere A)

per convenzioni si stabilisce che le correnti vanno dal potenziale positivo a quello negativo

bipolo : la misura della tensione avviene dal polo negativo al polo positivo mentre la corrente va dal polo positivo al polo negativo

ci dice qual è la reazione tra corrente e bipolo . nota la tensione applicata possiamo sapere qual è la corrente che esce dal bipolo attraverso

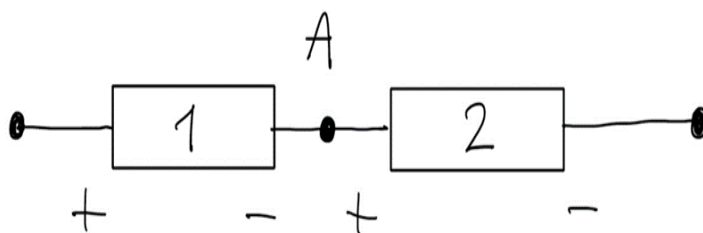
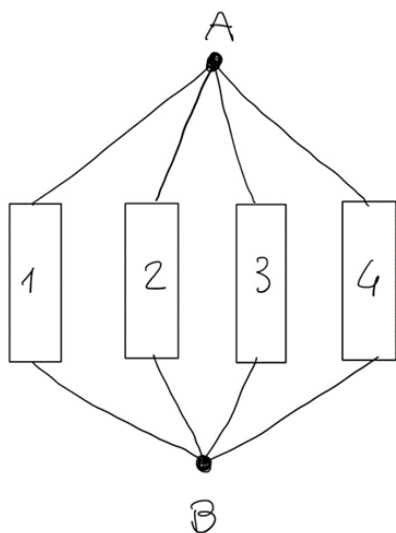
la formula

rapporto lineare tra tensione e corrente

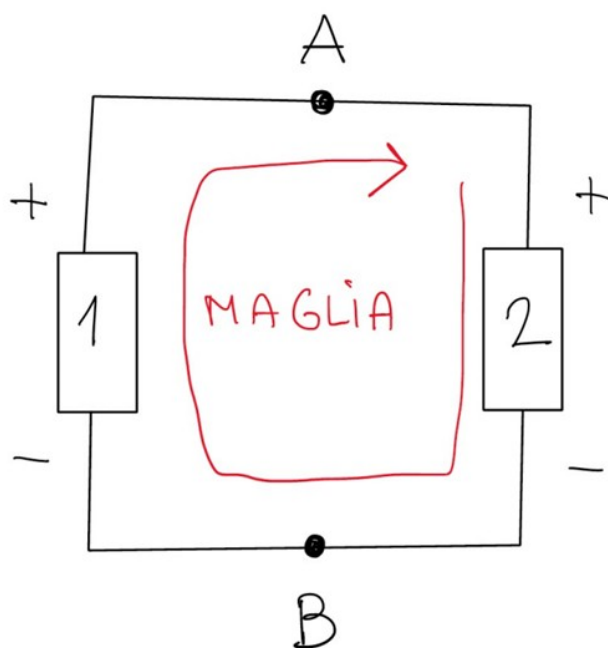
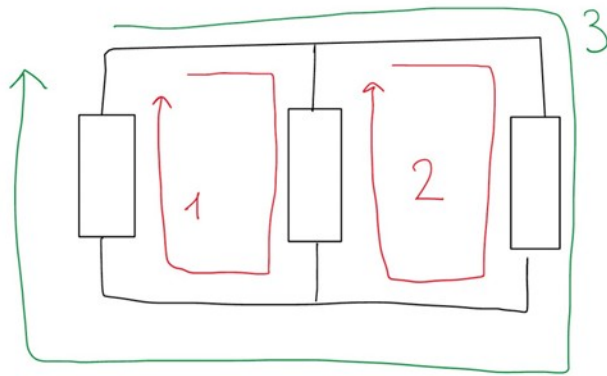
- **resistore**: si misura in OHM

legge di OHM : V = I R

- conduttanza (G) = 1/R   inverso della resistenza

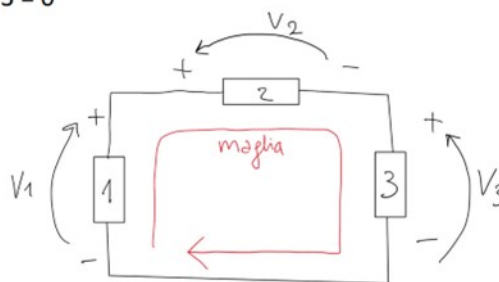
misurata in siemens S

$$I = (1/R)\ V = G\ V$$

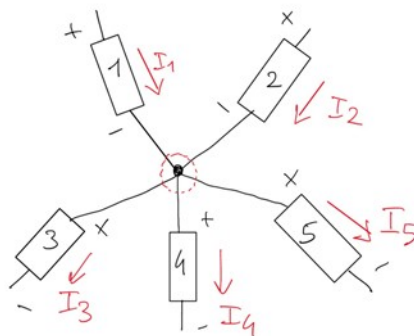
nodi di un circuito: è possibile collegare due bipoli creando un nodo

hanno entrambi due nodi

maglie di un circuito: qualsiasi percorso chiuso attraverso due o più bipoli

leggi di Kirchoff

Legge di **Kirkoff per le tensioni**:

- Lungo qualsiasi maglia di un circuito, la somma algebrica di tutte le tensioni è pari a zero.
- Consideriamo positive le tensioni concordi con il verso di percorrenza della maglia, e negative le tensioni discordi con il verso di percorrenza.
- Esempio: +V1 – V2 – V3 = 0

La scelta del verso di percorrenza della maglia è arbitraria.

Legge di **Kirkoff per le correnti**:

- in qualsiasi nodo di un circuito, la somma algebrica delle correnti è pari a zero;
- si considerano positive le correnti entranti, negative quelle uscenti dal nodo;
- Esempio: I1 + I2 – I3 – I4 – I5 = 0 → I1 + I2 = I3 + I4 + I5 (somma correnti entranti = somma correnti uscenti)

corto circuito CTO (corto tra nodi)

situazione con due nodi collegati direttamente tra loro tramite filo.

se vogliamo rappresentare un corto circuito con un bipolo basta inserire un generatore di tensione pari a zero (V=0 per qualsiasi I)

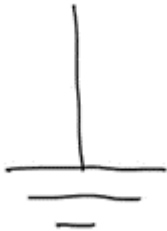
nella realtà un conduttore ideale (con resistenza nulla non esiste)

in un corto circuito ideale la resistenza è nulla dunque avremo una corrente che tende ad infinito ciò comporta un surriscaldamento del cavo

circuito aperto

opposto del corto circuito . c'è un circuito aperto tra due nodi ovvero assenza di collegamento , quindi assenza di corrente.

ciò è uguale ad avere un generatore di corrente pari a zero

nodo di riferimento o nodo di massa

attenzione due nodi di massa anche se graficamente non sono collegati sono in realtà collegati

introdotto il riferimento di massa possiamo pensare che la tensione in un nodo sia proprio pari all

e sapendo la tensione tra due nodi posso calcolare la resistenza tra i due nodi facendo la differenza delle tensioni.

condensatore

sono due piastre metalliche (armature) separate da isolante ed immagazzina quantità di carica

la carica immagazzinata è : Q = C x V

la capacità C va in base alla superficie e la distanza tra le armature

$$C = \varepsilon \cdot S/d$$

Sappiamo che $q(t) = C\,v(t)$ e che $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$. Possiamo dunque scrivere che:

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$$

Corrente nel condensatore è proporzionale alla **derivata della tensione** ai suoi capi. Se la tensione è costante, la derivata è nulla e non passa corrente (in questo caso il condensatore si comporta come un **circuito aperto**).

per immagazzinare la carica la tensione dev’essere variabile nel tempo

induttore

anche lui un bipolo sempre con un potenziale che va da - a + e la corrente che va da + a -

l’induttore è una bobina (solenoide) con una specifica induttanza (L) che si misura in henry (H)

ogni qualvolta varia il flusso magnetico all’interno dell’induttore avremo una variazione ai capi dell’induttore

varia l’induttanza se varia la corrente

Una variazione nel tempo del flusso magnetico produce una tensione ai capi dell’induttore: $v(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt}$.

Combinando questa equazione con la precedente, otteniamo:

$$v(t) = L\,\frac{di(t)}{dt}$$

La tensione ai capi dell’induttanza è proporzionale alla **derivata della corrente**.

Se la corrente è costante, la derivata è nulla e non c’`e tensione (in questo caso l’induttanza si comporta come un **cortocircuito**)

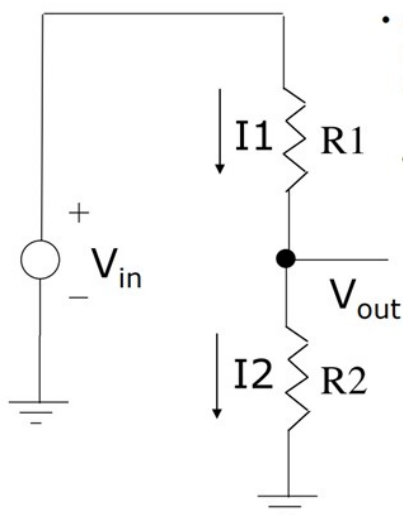
resistenze

in serie : due resistenze attraversate da stessa corrente dove la resistenza totale è data dalla somma delle resistenze

in parallelo: le due resistenze hanno la stessa tensione.

1/resistenza totale = 1/ R1 + 1/R2 che si può scrivere come (R1 x R2) / (R1+R2)

partitore resistivo

base della realizzazione dei filtri elettronici

- Applicando la legge di Kirchhoff sulle correnti al nodo di uscita del circuito (dove si misura la tensione di uscita V_{out}):

$$I_1 = I_2$$

- Applicando a questa relazione la legge di Ohm (I =V/R), che stabilisce che la corrente in un resistore è data dal rapporto fra la tensione ai capi del resistore e la sua resistenza:

$$\frac{V_{in} - V_{out}}{R_1} = \frac{V_{out} - 0}{R_2}$$

da cui si ricava: $V_{out} = V_{in} \frac{R_2}{R_1 + R_2}$

Il rapporto fra tensione di ingresso e tensione di uscita è il guadagno o funzione di trasferimento del circuito:

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

---

ricordare che la tensione di masse è per definizione zero

v out / v in è il guadagno

se vogliamo far si che si generi una tensione v out pari alla metà della V in mi basterà che R1 = R2

per misurare la tensione utilizzo un voltmetro con due terminali uno collegata al nodo di cui voglio misurare la tensione e l’altro collegata alla massa

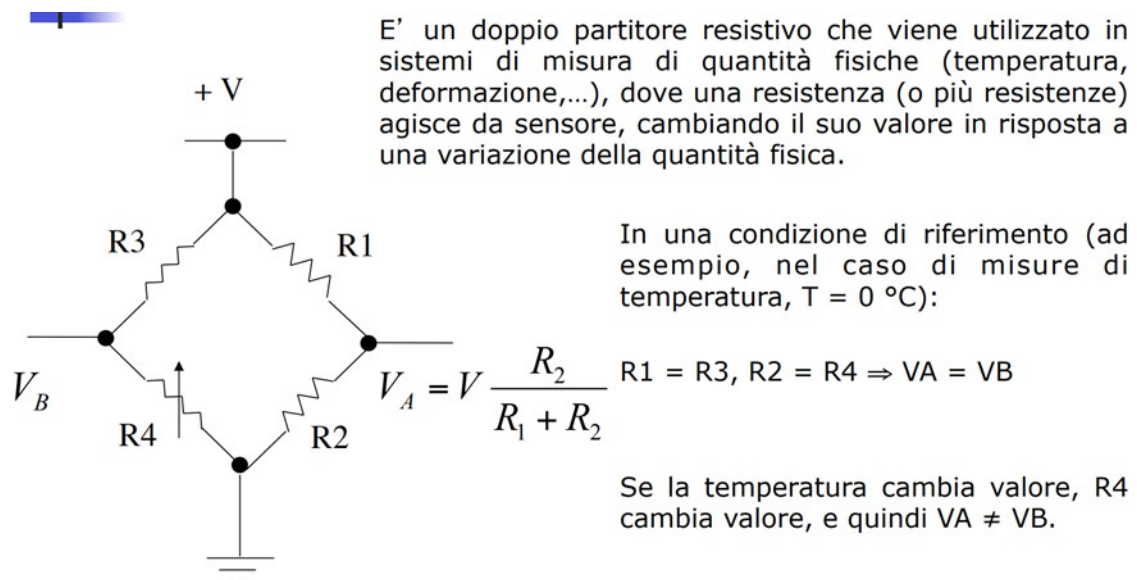
all’interno del voltmetro è presente una resistenza interna. questa resistenza sarà in parallelo alla resistenza del circuito.

devo dunque fare la somma delle due resistenze parallele per ottenere

R * =(R2 x Rin)/ R2 + Rin

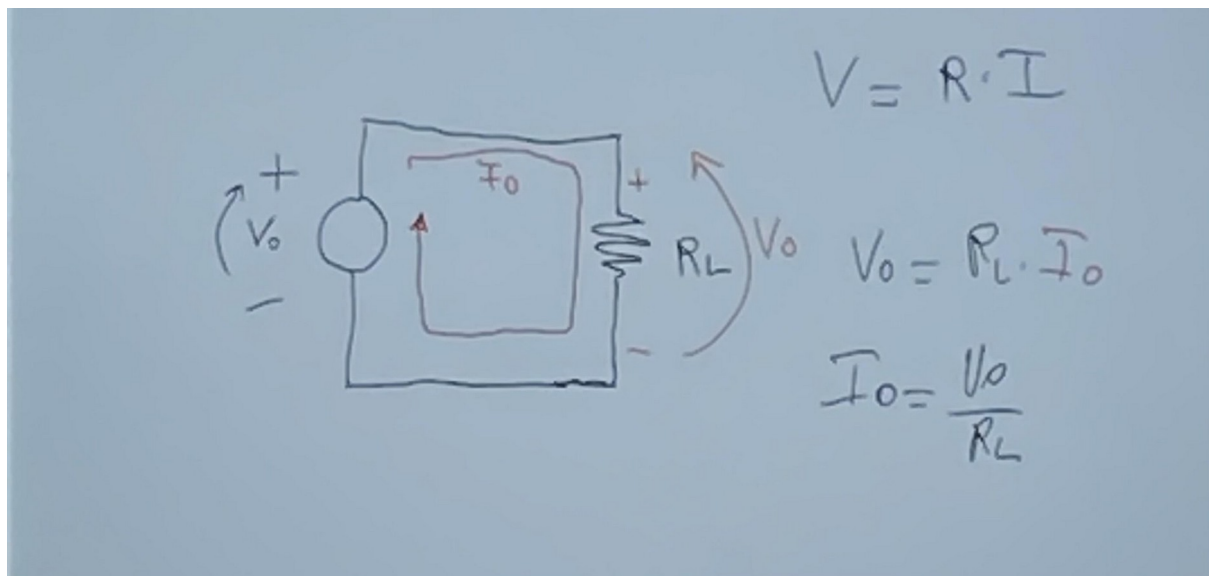
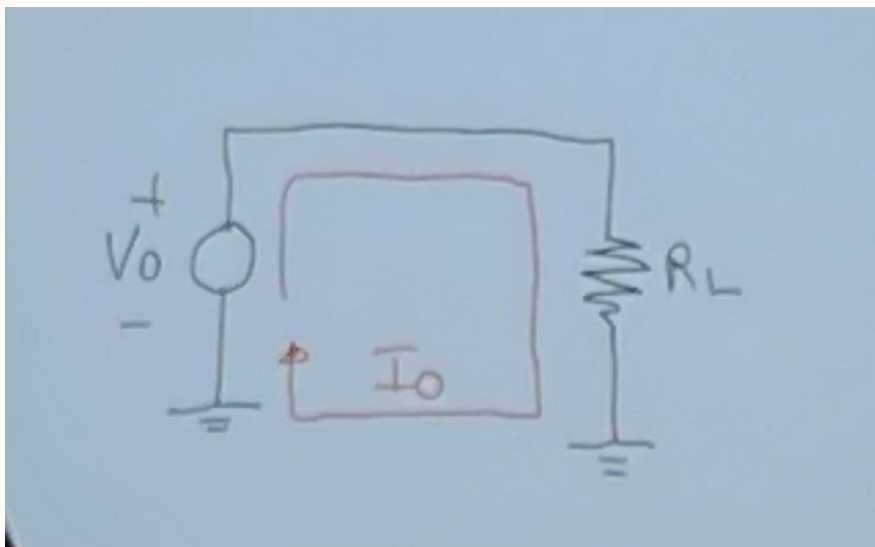
per far si che il circuito nuovo torno ad avere R*= R2 e R in tendere a infinito

ponte di resistenze

utilizzata nei sensori elettronici

R4 con la freccia indica che la resistenza può cambiare in funzione di una grandezza fisica (temperatura)

un ponte bilanciato ha resistenze uguali a coppie e di conseguenza Va =Vb (Va - Vb =0)

esistono i segnali differenziali che amplificano la differenza di potenziale

ripasso

il circuito può essere ridisegnato con una la presenza della massa o terra
(ricordando che questo è un circuito comunque chiuso)

segnali periodici e non periodici

Un segnale è una quantità variabile nel tempo che può essere rappresentata da un grafico. Il contenuto informativo è rappresentato dalle variazioni di ampiezza.

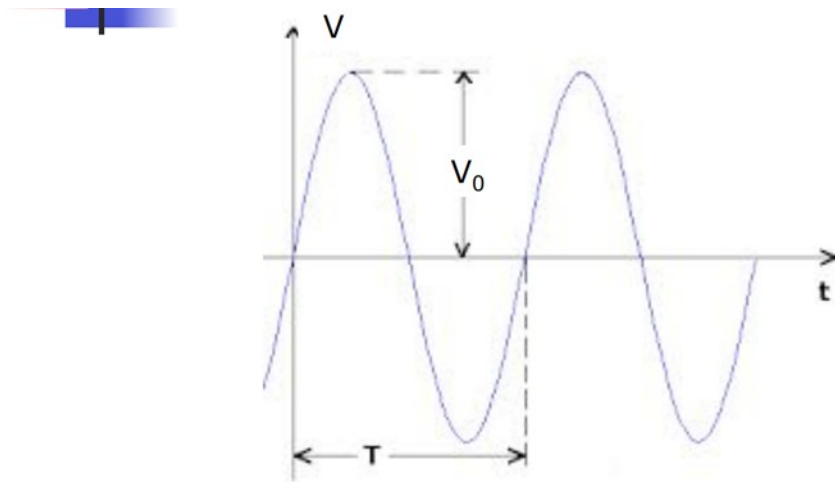
In generale, è difficile caratterizzare nel dominio del tempo dal punto di vista matematico segnali di forma arbitraria.

è più conveniente avere il segnale espresso con la frequenza piuttosto che con il tempo attraverso la serie di fourier che viene utilizzata quando il segnale è periodico nel tempo, mentre la trasformata di fourier viene utilizzata quando il segnale non è periodico

segnali sinusoidali

oscilla tra un picco massimo e un picco minimo V0 (ampiezza) .

 la frequenza f è l'inverso del periodo T ovvero 1/T e si misura in Hz

omega rappresenta la pulsazione o frequenza angolare = f x 2pigreco

serie di fourier

un generico segnale periodico ad una frequenza f0 possiamo scriverlo come una sommatoria da 1 a infinito di sinusoidi.

Un segnale f(t) ripetitivo (con un periodo T tale che f(t+T) = f(t) per ogni t) può essere espresso come somma di un numero infinito di sinusoidi dette armoniche:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ pulsazione angolare fondamentale, espressa in radianti per secondo

$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ frequenza fondamentale espressa in Hz

$2f_0, 3f_0, 4f_0, 5f_0, \ldots$ Frequenze armoniche

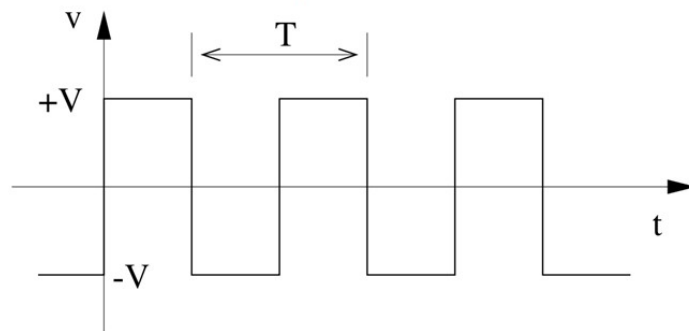
la formula può essere semplificata in

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

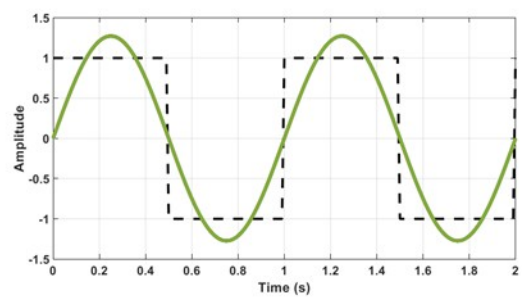
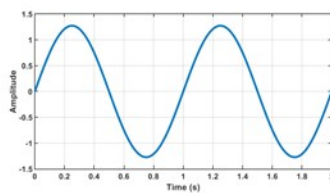
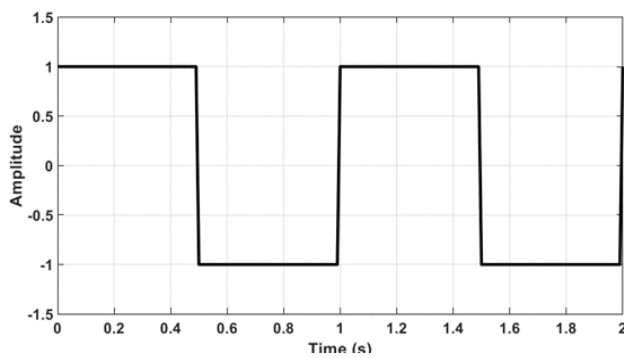
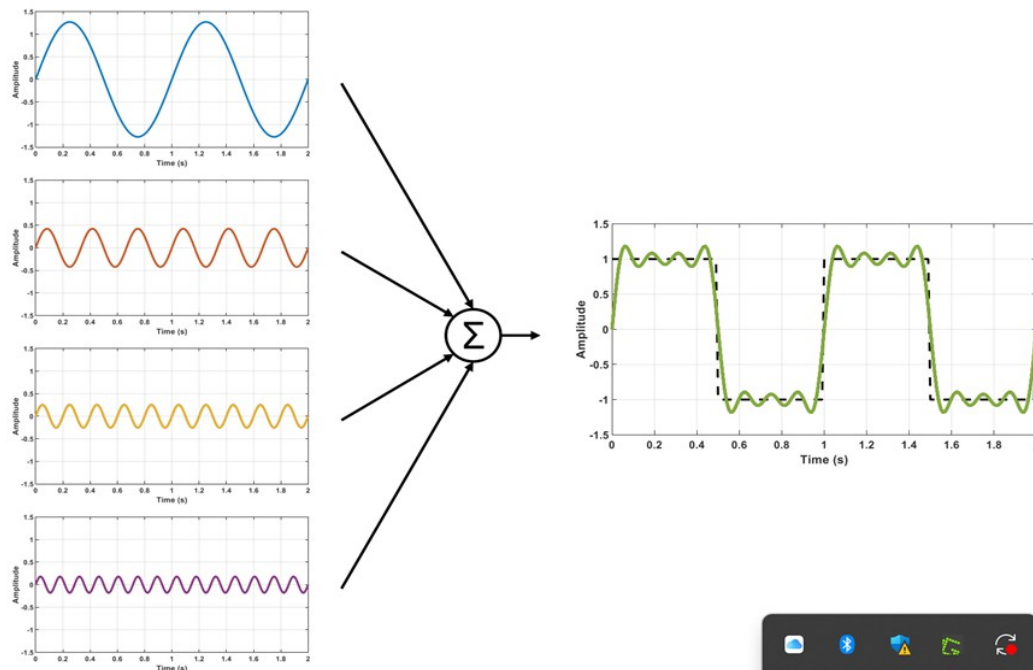
A0 = valore medio ampiezza

An = ampiezze

esempio

Onda quadra simmetrica di ampiezza V

Coefficienti di Fourier:

$A_n = 0$ per n pari $\qquad A_n = \dfrac{4V}{n\pi}$ per n dispari

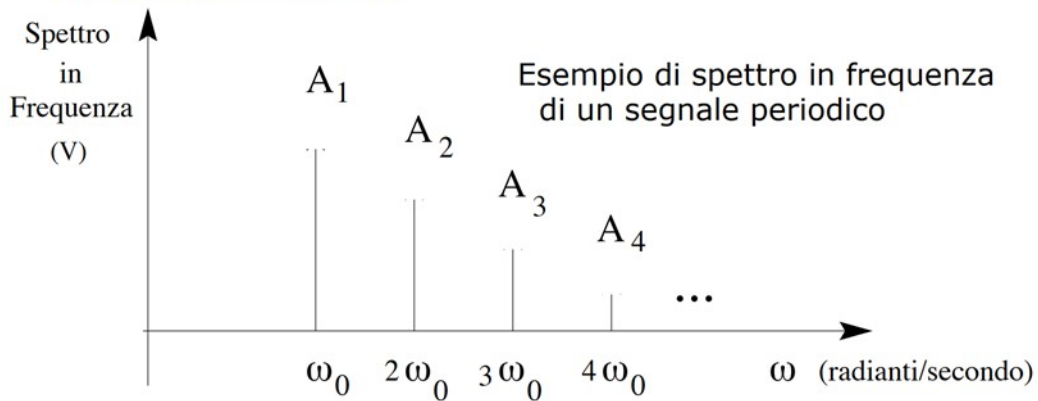
$$f(t) = \frac{4V}{\pi}\left(\sin\omega_0 t + \frac{1}{3}\sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5}\sin 5\omega_0 t + \ldots\ldots\right)$$

andando avanti a sommare componenti sinusoidali ottengo approssimazioni dell’onda quadra di partenza

dominio delle frequenza

spettro in frequenza che descrive i segnali nel dominio della

frequenza.

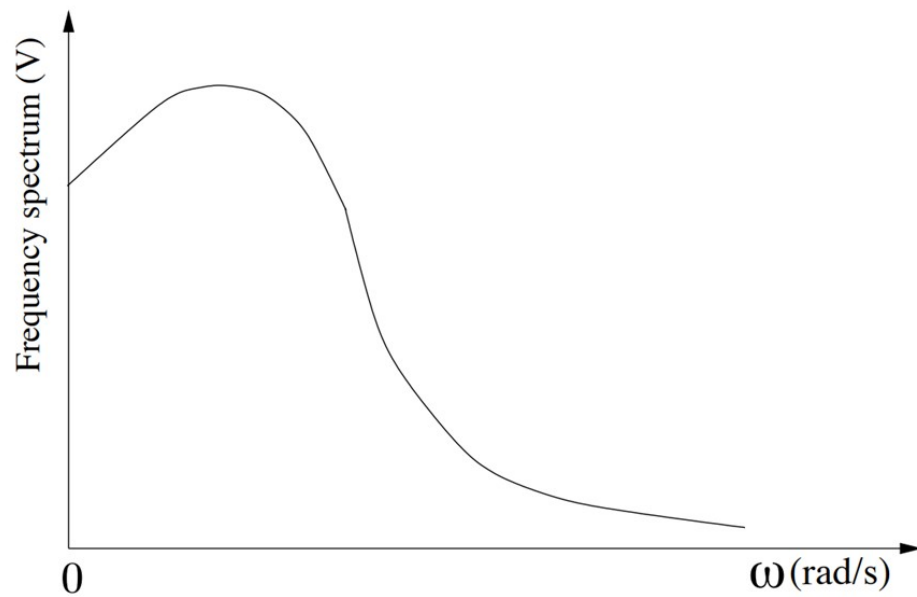
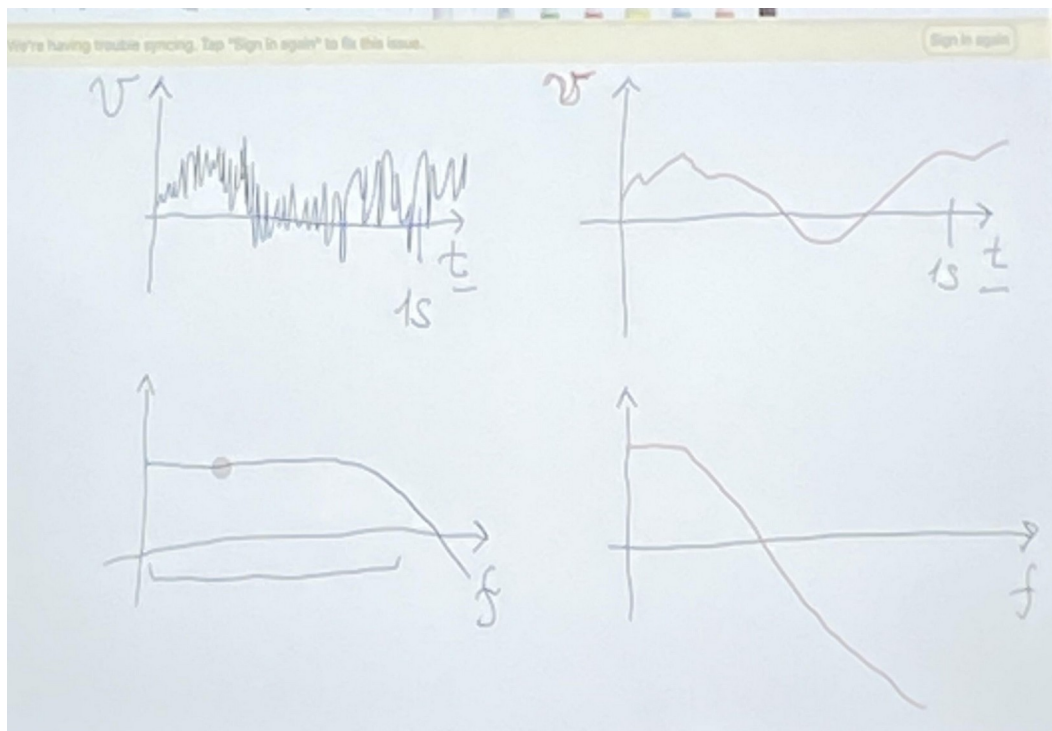
lo spettro (rappresentazione dell’ampiezza in funzione di omega (frequenza angolare))

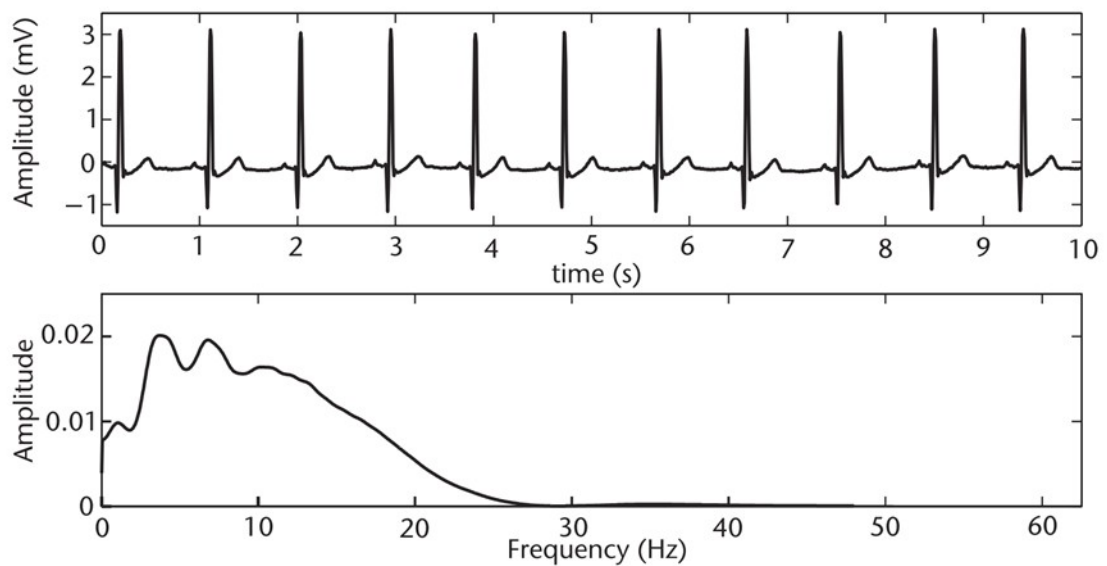
spettro si dice discreto perchè si presenta solo in presenza di omega zero e dei suoi multipli

Il valore dei coefficienti di Fourier è determinato dalla forma del segnale. E' possibile costruire un **diagramma dei coefficienti di Fourier in funzione della frequenza** corrispondente. Tale grafico è detto **spettro in frequenza** del segnale.
Lo **spettro di un segnale periodico è composto da frequenze discrete**.

man mano che aumenta la frequenza l’ampiezza diminuisce ragion per il quale nel grafico dello spettro l’ampiezza tende a diminuire all’aumentare di omega

per segnali non periodici si applica la trasformata di fourier

la trasformata di fourier si può vedere come un caso limite della serie di fourier che ha una frequenza che tende ad infinito

da luogo ad uno spettro continuo (e non discreto) ma anch’esso ci dice dove si trova l’energia delle sinusoidi

dal grafico è notabile come le ampiezze delle sinusoidi più rilevanti si trovino all’inizio, mentre tendono a diminuire man mano che aumenta omega

se la salita di tensione è verticale avremo uno spettro che terminerà più tardi rispetto ad un salita di tensione graduale la quale avrà uno spettro che terminerà prima

spettro in frequenza di segnali ECG

il segnale non è esattamente periodico motivo per il quale lo spettro è continuo (trasformata di fourier)

solo a bassa frequenza ci sono componenti significative ,ciò significa che nel segnale ECG non ci sono sinusoidi superiori a 50 Hz . possiamo dire che certamente sopra i 100 Hz non ci saranno segnali.

se si dovessero notare segnali di 100 Hz possiamo dire che il segnale è stato disturbato e quindi il segnale deve essere filtrato. allo stesso tempo un segnale ECG reale presenta fluttuazioni a bassa frequenza che potrebbe essere causato da un movimento del paziente e quindi anche le componenti a bassissima frequenza vanno eliminate.

queste operazioni vengono chiamate di filtraggio

guardando l’andamento dello spettro è possibile notare 4 picchi :

uno a circa 1 Hz (frequenza cardiaca) , uno a 4Hz , uno a 7hz ed l’ultimo a 10 Hz

numeri complessi nell'analisi dei circuiti elettronici

vengono utilizzati quando è presente un'ampiezza e una fase (segnali sinusoidali)

i numeri complessi sono numeri che si compone di due parti la parte reale e la parte immaginaria.

I numeri complessi

- Un numero complesso z ha la forma:

$$z = a + jb \qquad j = \sqrt{-1}$$

a = parte reale = Re(z)
b = parte immaginaria = Im(z)

- Il numero complesso coniugato di z è z*:

$$z = a - jb$$

- Ai numeri complessi si applicano tutte le regole dell'algebra ricordando che $j^2 = -1$

$$(a + jb) + (c + jd) = (a + c) + j(b + d)$$

$$(a + jb)(c + jd) = (ac - bd) + j(bc + ad)$$

$$\frac{(a + jb)}{(c + jd)} = \frac{(a + jb)(c - jd)}{(c + jd)(c - jd)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + j\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

Modulo di un numero complesso

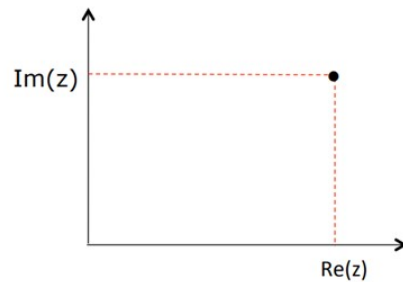
- Il modulo di un numero complesso è:

$$|z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{(a + jb)(a - jb)} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- Il modulo del prodotto (rapporto) di due numeri complessi è il prodotto (rapporto) dei moduli dei due numeri complessi

ricordarsi la formula (il modulo è dato dalla radice della parte reale al quadrato più la parte immaginaria al quadrato)

Il piano complesso

- I numeri complessi possono essere rappresentati graficamente nel piano complesso, dove l’asse x (asse reale) rappresenta la parte reale, l’asse y (asse immaginario) la parte immaginaria

si può rappresentare un numero complesso vettorialmente

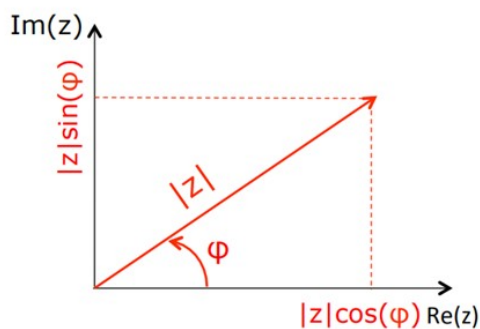
Coordinate polari e rappresentazione vettoriale

$$z = a + jb = |z| \cdot e^{j\varphi}$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$e^{j\phi} = \cos\phi + j\sin\phi$$

$$\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)} = \frac{|z|\sin(\phi)}{|z|\cos(\phi)} = tg(\phi)$$

$$\phi = arctg\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}$$ **= arctg(b/a)**

e ^j fi : esponenziale complesso

la proiezione sull’asse reale è z cos fi

la proiezione sull'asse immaginario è data da z sin fi

il rapporto tra la parte immaginaria e la parte reale risulta essere tan fi, posso così ricavare fi facendo l'arcotangente

Rapporto fra numeri complessi in coordinate polari

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1| \cdot e^{j\varphi_1}}{|z_2| \cdot e^{j\varphi_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

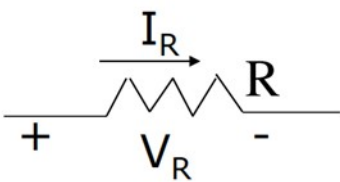
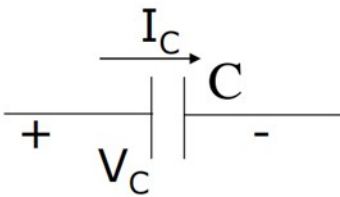
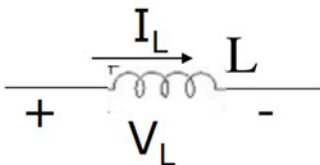
circuiti lineari

circuito che elabora un segnale in ingresso (tensione o corrente),

tensioni e correnti e le rispettive derivate compaiono con potenza massima uguale a 1 .

principio di sovrapposizione degli effetti (pse):

dato un circuito lineare con più ingressi a cui vengono applicati due segnali e un'unica uscita, l'uscita viene determinata facendo il contributo del primo segnale più il contributo del secondo segnale (li considero separati)

bisogna però considerare che quando ne considero uno l'altro è inattivo (spegnere il generatore) cioè bisogna cortocircuitare l'altro generatore (V = 0, collegamento a massa)

e successivamente devo valutare il contributo dell'altro segnale con lo stesso metodo.

ora posso sommare i due contributi

quando lavoro con un generatore di tensione devo creare un cortocircuito.

quando lavoro con un generatore di corrente devo sostituire il generatore con un circuito aperto (I = 0)

un circuito lineare è costituito da bipoli anch'essi lineari

Resistenza I_R R + V_R -

$$V_R = RI_R$$

Condensatore I_C C + V_C -

$$I_C = C \cdot \frac{dV_C}{dt}$$

Induttanza I_L L + V_L -

$$V_L = L \cdot \frac{dI_L}{dt}$$

in presenza di un circuito lineare a cui viene applicata una frequenza sinusoidale in risposta ci sarà una frequenza sinusoidale alla stessa pulsazione (omega 0) della sinusoide in ingresso. (RIMANE COSTANTE LA PULSAZIONE)

ciò che può variare è l'ampiezza e la fase.

risposta in frequenza per un segnale sinusoidale

studia la trasformazione dell'ampiezza e della fase al variare del segnale in ingresso.

il segnale è sempre :

$$v(t) = V_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$v(j\omega) = V_0 \cdot e^{j(\omega t+\varphi)}$$

V_0 = modulo $\omega t+\varphi$ = argomento $j = \sqrt{-1}$

scritto sottoforma di numero complesso

che può essere scritto attraverso la formula di eulero come :

$$e^{j(\omega t+\varphi)} = \cos(\omega t + \varphi) + j \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

c'è dunque una relazione tra un segnale sinusoidale e il numero complesso

$$V_0 e^{j(\omega t+\varphi)} = \underbrace{V_0 \cos(\omega t + \varphi)}_{\text{Re } V(j\omega)} + j \cdot \underbrace{V_0 \sin(\omega t + \varphi)}_{\text{Im } V(j\omega)}$$

ricordando che il numero complesso è il segnale sinusoidale . conviene studiare la risposta in frequenza applicando un numero complesso

In un circuito lineare a cui viene applicato in ingresso un segnale sinusoidale, il segnale di uscita è anch'esso sinusoidale, con la stessa frequenza del segnale di ingresso (regime sinusoidale).

Entrambi i segnali possono essere descritti tramite numeri complessi, come funzioni di jω per evidenziare che il circuito si trova in regime sinusoidale.

$$v_{IN}(j\omega) = V_{IN} \cdot e^{j(\omega t+\varphi_{IN})}$$

$$v_{OUT}(j\omega) = V_{OUT} \cdot e^{j(\omega t+\varphi_{OUT})}$$

La risposta in frequenza del circuito viene determinando studiando il guadagno o funzione di trasferimento in regime sinusoidale, cioè il rapporto fra $V_{OUT}(j\omega)$ e $V_{IN}(j\omega)$.

$$T(j\omega) = \frac{v_{OUT}(j\omega)}{v_{IN}(j\omega)} = \frac{V_{OUT} \cdot e^{j(\omega t+\varphi_{OUT})}}{V_{IN} \cdot e^{j(\omega t+\varphi_{IN})}} = \frac{V_{OUT}}{V_{IN}} \cdot \frac{e^{j(\omega t+\varphi_{OUT})}}{e^{j(\omega t+\varphi_{IN})}} = \frac{V_{OUT}}{V_{IN}} \cdot \frac{\cancel{e^{j\omega t}} e^{j\varphi_{OUT}}}{\cancel{e^{j\omega t}} e^{j\varphi_{IN}}}$$

j indica che siamo nei numeri complessi e omega che siamo in regime sinusoidale

attraverso la semplificazione è possibile elidere il tempo e definire così il guadagno del circuito

$$T(j\omega) = \frac{v_{OUT}(j\omega)}{v_{IN}(j\omega)} = \frac{V_{OUT}}{V_{IN}} \cdot e^{j(\varphi_{OUT} - \varphi_{IN})}$$

Fase del guadagno

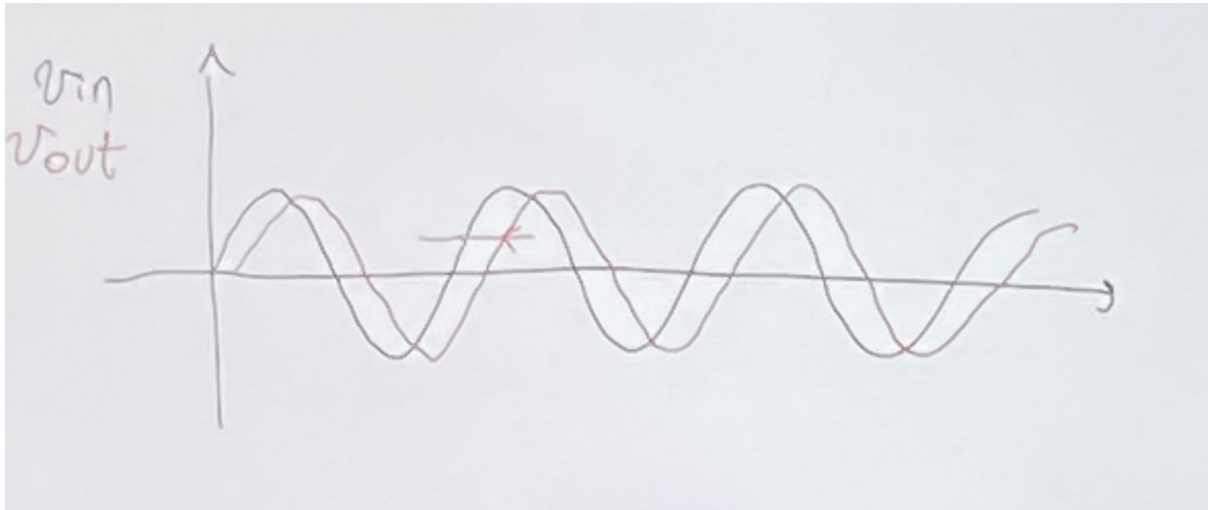
Modulo del guadagno

$\frac{V_{OUT}}{V_{IN}} \Rightarrow$ Il modulo del guadagno è dato dal rapporto fra l'ampiezza del segnale di uscita e l'ampiezza del segnale di ingresso

$\varphi_{OUT} - \varphi_{IN} \Rightarrow$ La fase del guadagno è la differenza di fase ("sfasamento") fra il segnale di uscita e il segnale di ingresso

T (j omega) è detta funzione di trasferimento del segnale in regime sinusoidale e rappresenta

v out / v in è il rapporto dell'ampiezza del segnale sinusoidale iniziale fratto l'ampiezza del segnale sinusoidale in uscita

f out - f in ci dice quanto vale lo sfasamento (t / T) e si misura in radianti (ritardo = t)

ciò che otteniamo è sempre un numero complesso

il simbolo dell'angolo indica lo sfasamento

se in ingresso applichiamo un segnale V in , l'uscita del segnale in funzione del tempo sarà un segnale sinusoidale con stessa pulsazione di V in. l'ampiezza e la fase sarà in base alla funzione di trasferimento (T)

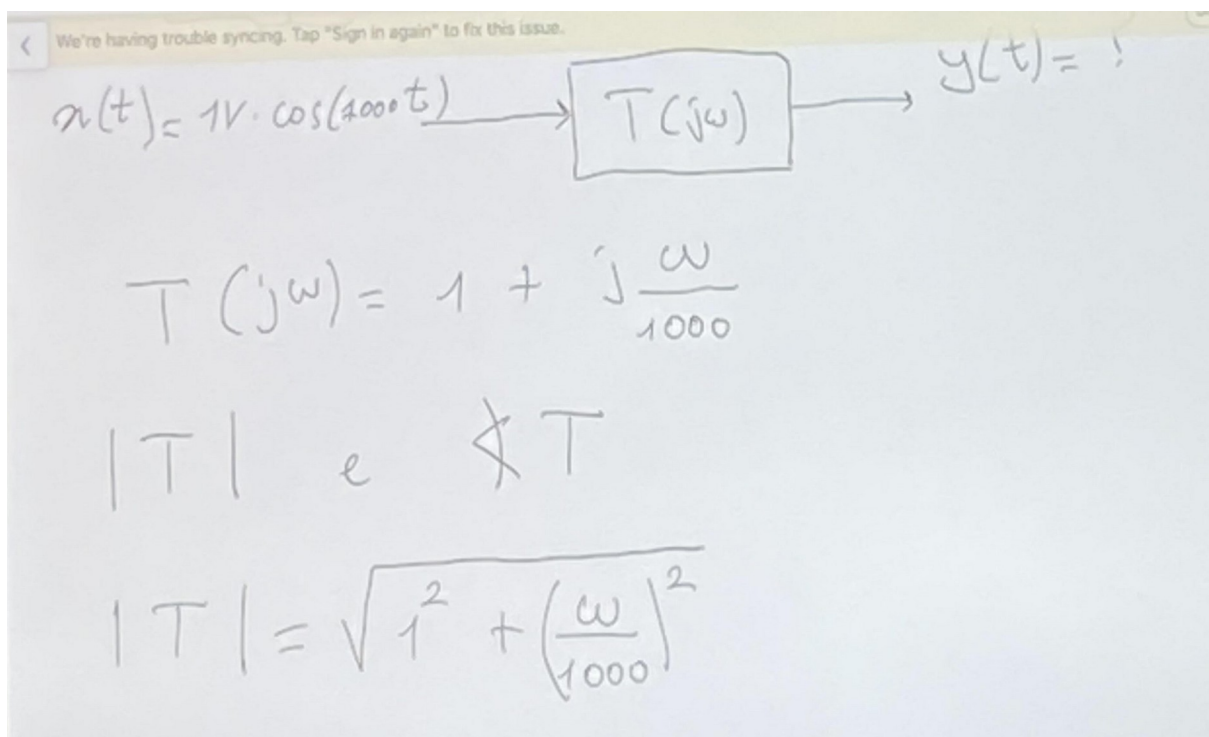
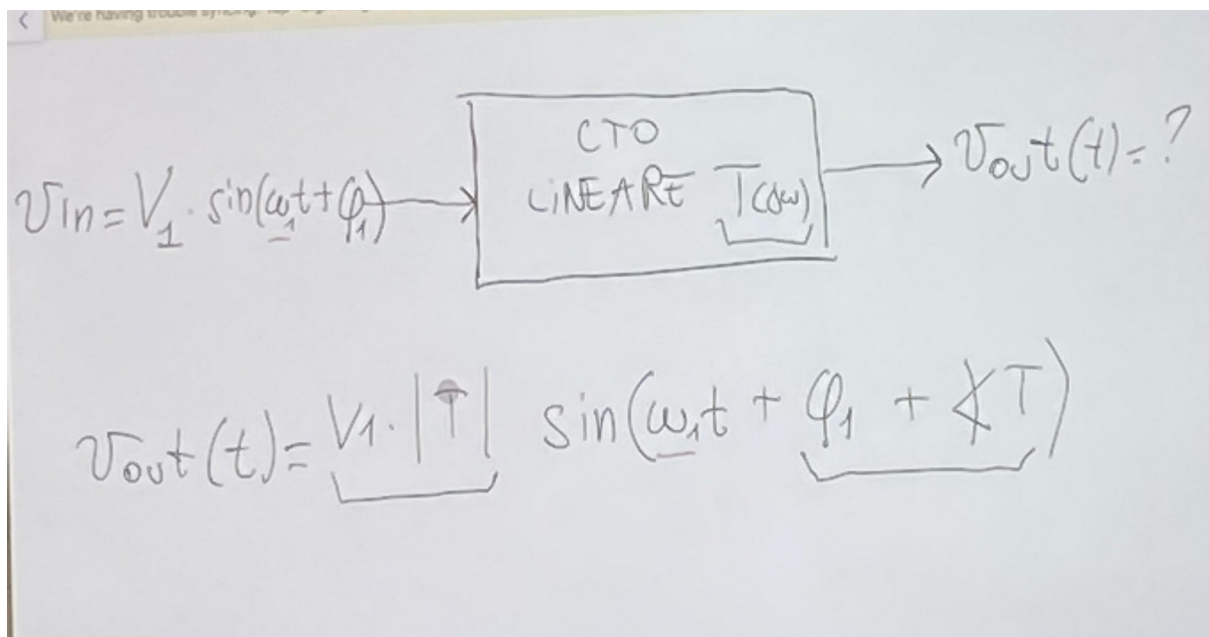
$$v_{in} = V_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \rightarrow \boxed{\text{CTO LINEARE } T(j\omega)} \rightarrow v_{out}(t) = ?$$

$$v_{out}(t) = V_1 \cdot |T| \sin(\omega_1 t + \varphi_1 + \measuredangle T)$$

$$x(t) = 1V \cdot \cos(1000t) \rightarrow \boxed{T(j\omega)} \rightarrow y(t) = ?$$

$$T(j\omega) = 1 + j\frac{\omega}{1000}$$

$$|T| \quad e \quad \measuredangle T$$

$$|T| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\omega}{1000}\right)^2}$$

inizialmente la fase è nulla , conosciamo la funzione di trasferimento che dipende da come è fatto internamente il circuito.

bisogna calcolare il modulo di T e la fase di T attraverso le formule

omega del segnale è = 1000 rad / s

bisogna valutare modulo e fase in corrispondenza della pulsazione che do in ingresso ovvero 1000 rad/s andandolo a sostituire all’interno delle formule

$|T|$ e $\measuredangle T$

$$|T| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\omega}{1000}\right)^2}$$

$$\measuredangle T = \operatorname{arctg} \frac{\omega/1000}{1} = \operatorname{arctg} \frac{\omega}{1000}$$

$$|T|_{\omega=\omega_s} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1000}{1000}\right)^2} = \sqrt{2}$$

ottengo la radice di 2 per il modulo

$$\measuredangle T_{\omega=\omega_s} = \operatorname{arctg} \frac{\omega_s}{1000} = \operatorname{arctg} \frac{1000}{1000} = \operatorname{arctg} 1 = 45° \quad \frac{\pi}{4}\,\text{rad}$$

e 45 gradi per la fase

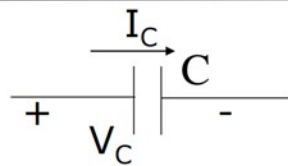
$$y(t) = 1V\,|T| \cos(1000t + \measuredangle T) = \sqrt{2}\,V \cdot \cos\left(1000t + \frac{\pi}{4}\right)$$

l’uscita si ottiene prendendo l’ampiezza (1 V) moltiplicata per il modulo di T poi alla fase iniziale (nulla) devo sommare la fase della funzione di trasferimento

come si comportano i bipoli in regime sinusoidale

Il condensatore in regime sinusoidale

I_C C

\+ V_C -

$$I_C = C \cdot \frac{dV_C}{dt}$$

$$v_C(j\omega) = V_C \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$$

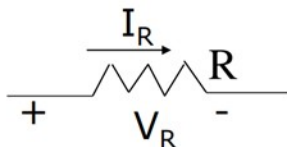
$$i_C(j\omega) = C \cdot \frac{dv_C(j\omega)}{dt} = C \cdot V_C \cdot e^{j(\omega t + \phi)} \cdot j\omega = j\omega C \cdot v_C(j\omega)$$

$$i_C(j\omega) = j\omega C \cdot v_C(j\omega)$$

$$v_C(j\omega) = \frac{1}{j\omega C} \cdot i_C(j\omega)$$

Questa relazione presenta una chiara analogia con la legge di Ohm, che descrive la relazione corrente-tensione in una resistenza:

I_R R

\+ V_R -

$$V_R = RI_R$$

8

se si immagina di agire in regime sinusoidale posso convertire in numero complesso

bisogna valutare quanto vale derivata della tensione rispetto al tempo

esprimendo la tensione in funzione della corrente si ottiene l’ultima formula che ricorda molto la legge di OHM

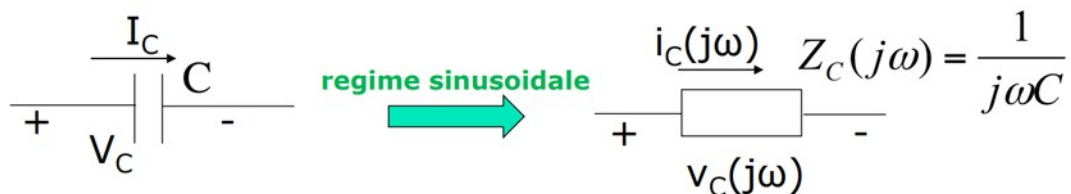
ciò significa che in regime sinusoidale il condensatore può essere trattato con la legge di OHM (in regime sinusoidale) LEGGE DI OHM GENERALIZZATA

z è l'impedenza complessa

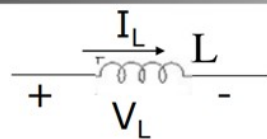
In regime sinusoidale, la relazione corrente-tensione in un condensatore può essere scritta nella forma di una **legge di Ohm generalizzata**:

$$v_C(j\omega) = Z_C(j\omega) \cdot i_C(j\omega)$$

$$Z_C(j\omega) = \frac{1}{j\omega C} =$$ **Impedenza complessa** o **impedenza in regime sinusoidale** del condensatore

I_C C + V_C - **regime sinusoidale** $i_C(j\omega)$ $Z_C(j\omega) = \frac{1}{j\omega C}$ + $v_C(j\omega)$ -

quando studiamo il condensatore in regime sinusoidale lo consideriamo un bipolo con impedenza pari a Zc

Impedenza di un induttore in regime sinusoidale

I_L L + V_L -

$$V_L = L \cdot \frac{dI_L}{dt}$$

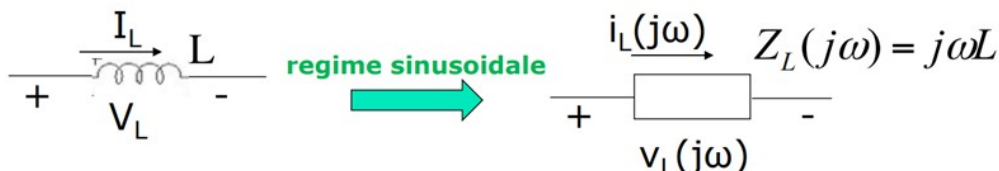
$$i_L(j\omega) = I_L \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$v_L(j\omega) = L \cdot \frac{di_L(j\omega)}{dt} = L \cdot I_L \cdot e^{j(\omega t + \phi)} \cdot j\omega = j\omega L \cdot i_L(j\omega)$$

$$v_L(j\omega) = Z_L(j\omega) \cdot i_L(j\omega)$$

$$Z_L(j\omega) = j\omega L =$$ **Impedenza complessa** o **impedenza in regime sinusoidale** dell'induttore

I_L L + V_L - **regime sinusoidale** $i_L(j\omega)$ $Z_L(j\omega) = j\omega L$ + $v_L(j\omega)$ -

10

Vl in regime sinusoidale diventa Vl (j omega) con iL che deve essere derivato

da qui è possibile notare la legge di OHM (V= R I)

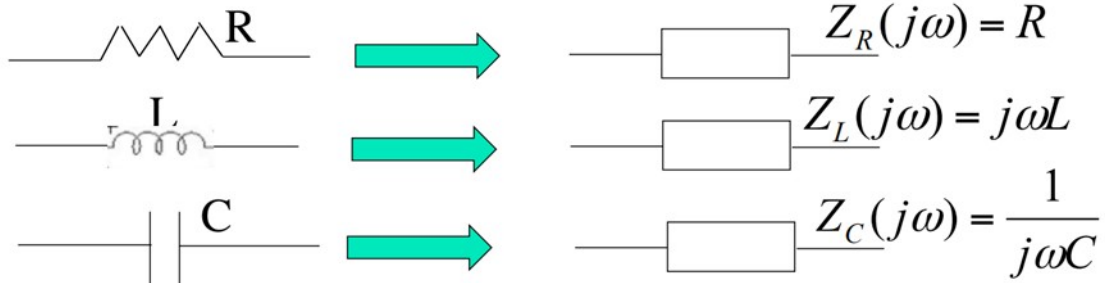
l'induttanza deve essere sostituita con un bipolo con impedenza pari a ZL

Analisi di un circuito lineare in regime sinusoidale

Resistenze, induttori e condensatori vengono rappresentati dalle rispettive impedenze complesse:

R → $Z_R(j\omega) = R$

L → $Z_L(j\omega) = j\omega L$

C → $Z_C(j\omega) = \dfrac{1}{j\omega C}$

Le relazioni corrente-tensione sono descritte dalle leggi di Ohm generalizzate:

$$v(j\omega) = Z(j\omega) \cdot i(j\omega)$$

Si applicano le leggi di Kirchhoff alle variabili complesse (correnti e tensioni).

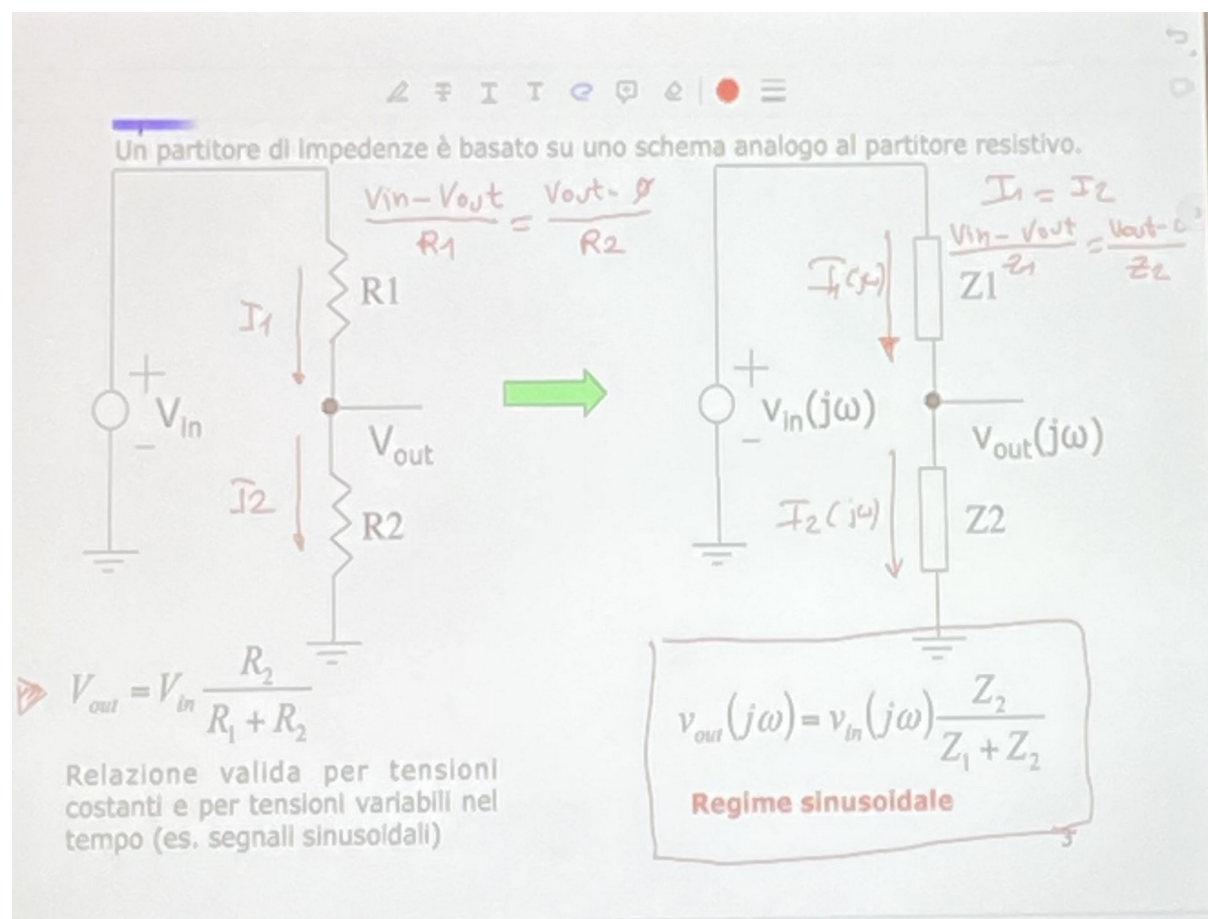
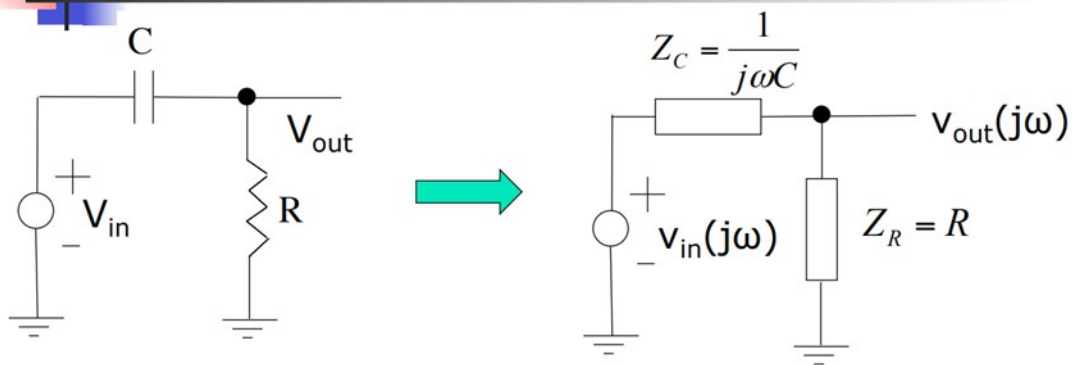
una volta sostituite le impedenze è possibile poi applicare la legge di OHM generalizzata e le leggi di Kirchhoff ed effettuare i conti diventa più semplice.

filtraggio di segnali ECG

un filtro è realizzato come un partitore di impedenze

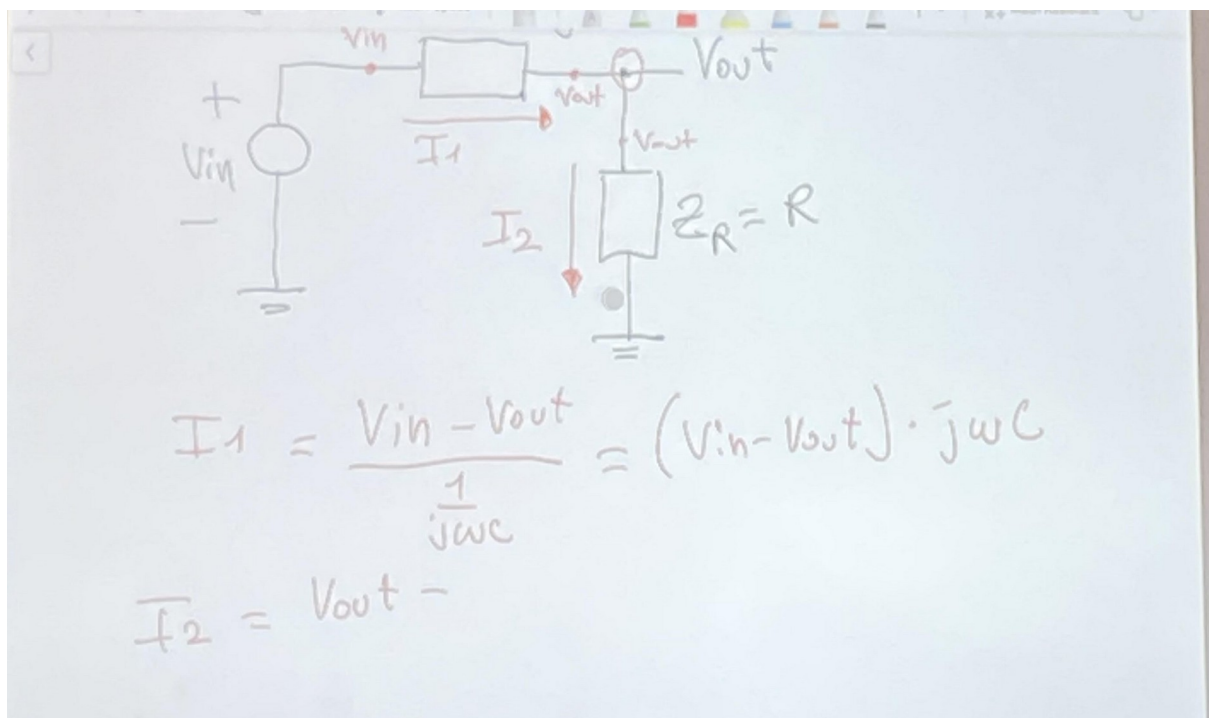
Partitore di impedenze

a sinistra il partitore resistivo

viene applicato un segnale in ingresso; applicando krichooff nel nodo

filtro passa alto

Z1 è un condensatore perciò diventa 1/(jwC) mentre Z2 una resistenza (R)

bisogna sostituire i bipoli con le relative impedenze

(C è la capacità del condensatore)

se non si ricorda la formula del partitore (zr / ...) faccio un bilancio nel nodo. la scelta del verso delle corrente è indifferente

applico la legge di kirchhoff nei nodi : i1 = i2

$$+I_1 - I_2 = 0 \qquad I_1 = I_2$$

$$(V_{in} - V_{out})\, j\omega C = \frac{V_{out}}{R}$$

Modulo del guadagno: $\left|f.d.t.(j\omega)\right| = \left|\frac{V_{OUT}(j\omega)}{V_{IN}(j\omega)}\right|$

$$Z = a + jb \longrightarrow |Z| = \sqrt{(\mathrm{Re})^2 + (\mathrm{Im})^2} = \sqrt{(a)^2 + (b)^2}$$

$$Z = \frac{a + jb}{c + jd} \longrightarrow |Z| = \frac{\sqrt{(a)^2 + (b)^2}}{\sqrt{(c)^2 + (d)^2}}$$

$$\frac{V_{OUT}(j\omega)}{V_{IN}(j\omega)} = \frac{j\omega CR}{1 + j\omega CR}$$

$$|T(j\omega)| = \left|\frac{V_{OUT}(j\omega)}{V_{IN}(j\omega)}\right| = \frac{\sqrt{(0)^2 + (\omega RC)^2}}{\sqrt{(1)^2 + (\omega RC)^2}} = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad \begin{cases} \xrightarrow{\omega \to 0} 0 \\ \xrightarrow{\omega \to \infty} 1 \end{cases}$$

Il modulo del guadagno è il rapporto fra l'ampiezza del segnale di uscita e quella del segnale di ingresso.

A bassa frequenza ($\omega \to 0$), questo circuito introduce una forte attenuazione ($|T(j\omega)| \to 0$), cioè l'ampiezza del segnale di uscita è molto minore di quella del segnale di ingresso.

Ad alta frequenza ($\omega \to \infty$), il segnale di uscita ha la stessa ampiezza del segnale di ingresso ($|T(j\omega)| \to 1$).

I segnali sinusoidali ad alta frequenza passano invariati in ampiezza attraverso il circuito ⇒ **filtro passa-alto**

6

se omega tende a zero significa considerare un segnale a bassissima frequenza

se omega tende ad infinito

il circuito si comporta in modo selettivo a seconda della frequenza

se T = 1 significa che l'ampiezza in ingresso è uguale all'ampiezza in uscita

se T = 0 significa che c'è una forte attenuazione del segnale in ingresso

per questo si chiama filtro passa alto perchè passano solo i segnali ad alta frequenza

RICORDARE IL MENO

se omega tende a zero sarebbe 90 - 0 = 90 sfasamento di 90

se omega tende a infinito 90-90 = 0 non c’è sfasamento tra ingresso e uscita

quindi riassumendo in bassa frequenza

in alta frequenza i due segnali sono sovrapposti e il segnale in uscita è uguale al segnale in ingresso

esiste una frequenza in cui siamo in alta frequenza ma per cui il filtro inizia ad attenuare il seganle ?

Filtro passa-alto

I segnali sinusoidali ad alta frequenza passano invariati in ampiezza e fase attraverso il circuito

⇒filtro passa-alto

Dalle relazioni precedenti si può facilmente ricavare che alta frequenza significa:

$$\omega >> \frac{1}{RC}$$

$$f >> \frac{1}{2\pi RC}$$

I segnali sinusoidali a bassa frequenza vengono fortemente attenuati da questo circuito (bassa frequenza: $f << \frac{1}{2\pi RC}$)

$$f_o = \frac{1}{2\pi RC}$$ = **frequenza di taglio del filtro (frequenza caratteristica)**

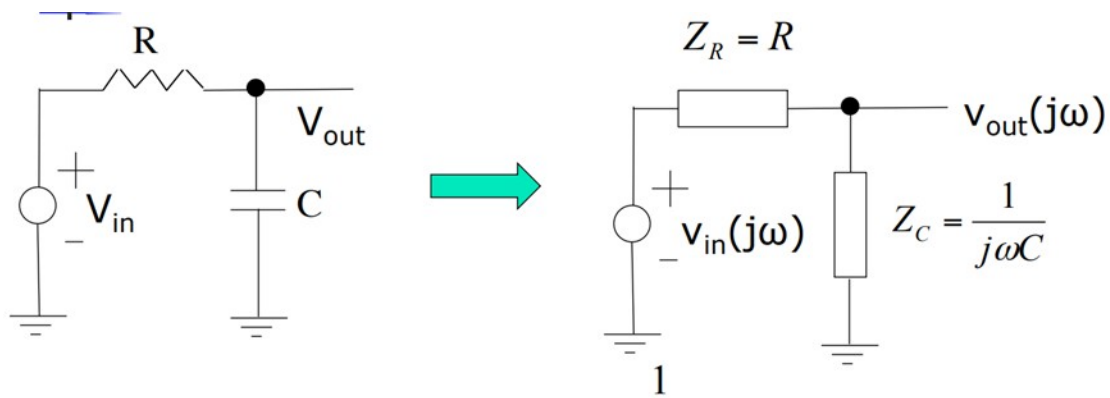
8

omega = 1/ RC si dice discriminante

la frequenza di taglio distingue le frequenze che vengono filtrate (a bassa frequenza) da quelle che non vengono filtrate. la frequenza di taglio può variare facendo variare R e C

se la frequenza in ingresso è maggiore della frequenza di taglio allora passa altrimenti viene filtrato

filtro passa-basso

fa passare le basse frequenze ma non le alte

devo sempre calcolarmi la fase e il modulo

$$\frac{V_{OUT}(j\omega)}{V_{IN}(j\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega CR}$$

$$\left|\frac{V_{OUT}(j\omega)}{V_{IN}(j\omega)}\right| = \frac{\sqrt{(1)^2 + (0)^2}}{\sqrt{(1)^2 + (\omega CR)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad \begin{cases} \omega \to 0 & \to 1 \\ \omega \to \infty & \to 0 \end{cases}$$

Il modulo del guadagno è il rapporto fra l'ampiezza del segnale di uscita e quella del segnale di ingresso.

A bassa frequenza ($\omega \to 0$), il segnale di uscita ha la stessa ampiezza del segnale di ingresso ($|T(j\omega)| \to 1$).

Ad alta frequenza ($\omega \to \infty$), questo circuito introduce una forte attenuazione ($|T(j\omega)| \to 0$), cioè l'ampiezza del segnale di uscita è molto minore di quella del segnale di ingresso.

I segnali sinusoidali a bassa frequenza passano invariati in ampiezza attraverso il circuito ⇒ **filtro passa-basso**

10

sapendo che omega zero è bassa frequenza e omega infinito è alta frequenza

Fase del guadagno: $\varphi(j\omega) = \varphi_{OUT} - \varphi_{IN}$

$$T(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega CR}$$

$$\varphi(j\omega) = arctg(0/1) - arctg(\omega CR/1) = 0° - arctg(\omega CR)$$

$\omega \to 0$: 0°

$\omega \to \infty$: -90°

I segnali sinusoidali a bassa frequenza passano invariati in ampiezza e fase attraverso il circuito

⇒ **filtro passa-basso**

Dalle relazioni precedenti si può facilmente ricavare che bassa frequenza significa:

$$\omega << \frac{1}{RC}$$

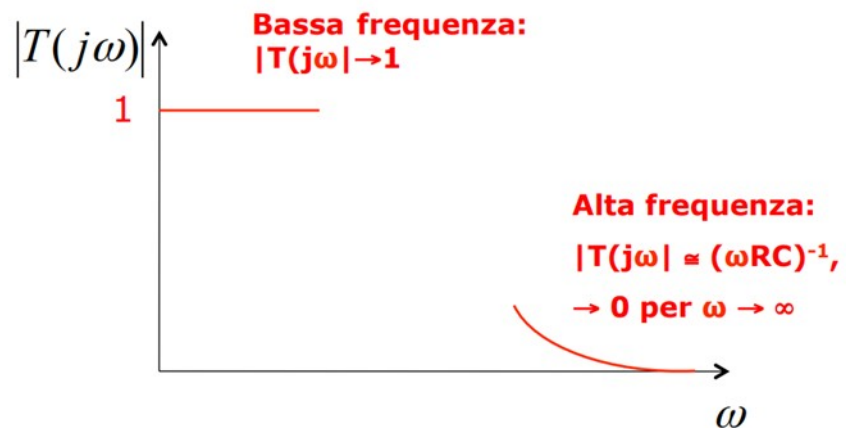
$$f << \frac{1}{2\pi RC}$$

I segnali sinusoidali ad alta frequenza vengono fortemente attenuati da questo circuito (alta frequenza: $f >> \frac{1}{2\pi RC}$)

$$f_o = \frac{1}{2\pi RC}$$ = **frequenza di taglio del filtro (frequenza caratteristica)**

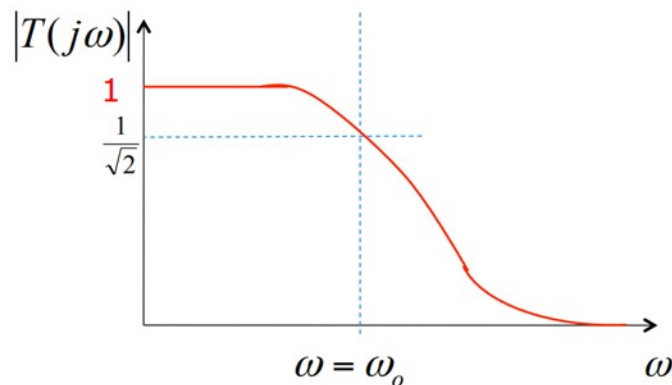
sia per il filtro passa alto che passa bassa la frequenza discriminante è la stessa

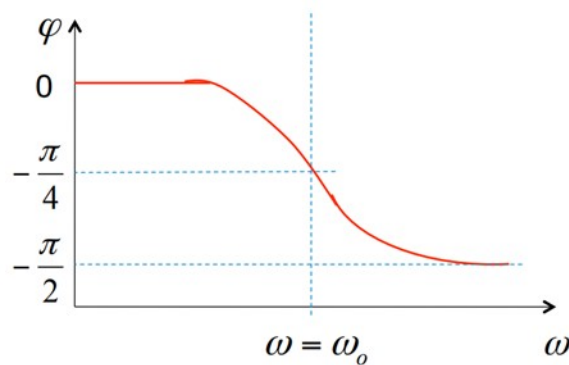
rappresentazione grafica del modulo della funzione trasferimento in funzione della pulsazione omega

Modulo del guadagno: $|T(j\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}}$

nella regione in mezzo come sarà?

punto in cui la pulsazione è omega 0 com'è il modulo ?

$$\omega = \omega_o = \frac{1}{RC} \Rightarrow |T(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Quindi raccordando i tratti a bassa ed alta frequenza si ottiene il grafico seguente, in cui si definisce **banda passante del filtro** la regione $\omega < \omega_0$. In prima approssimazione, si può dire che segnali con frequenza nella banda passante vengono trasmessi dal filtro inalterati in ampiezza (o subendo una attenuazione comunque piccola).

da questo punto in poi l'ampiezza del segnale comincia ad essere attenuata

quindi tutti i segnali che hanno una pulsazione maggiore di omega 0 verranno attenuati

un grafico del modulo in questo modo non è efficace in elettronica si varia tra frequenze molto basse e frequenze molto alte perciò si utilizza la scala logaritmica e non in scala lineare

viene quindi rappresentata in decibel che utilizza la scala logaritmica

Decibel

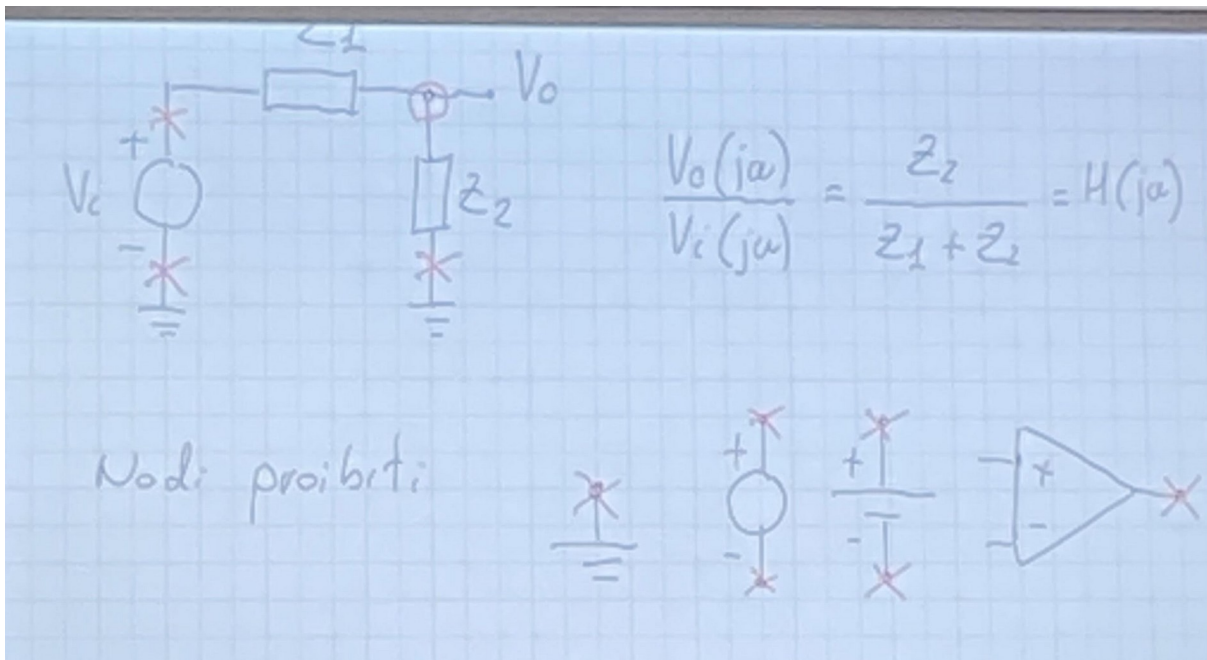
L'ampiezza relativa di due segnali può essere espressa dal loro rapporto. Quando si devono trattare rapporti grandi diventa comodo utilizzare scale logaritmiche.

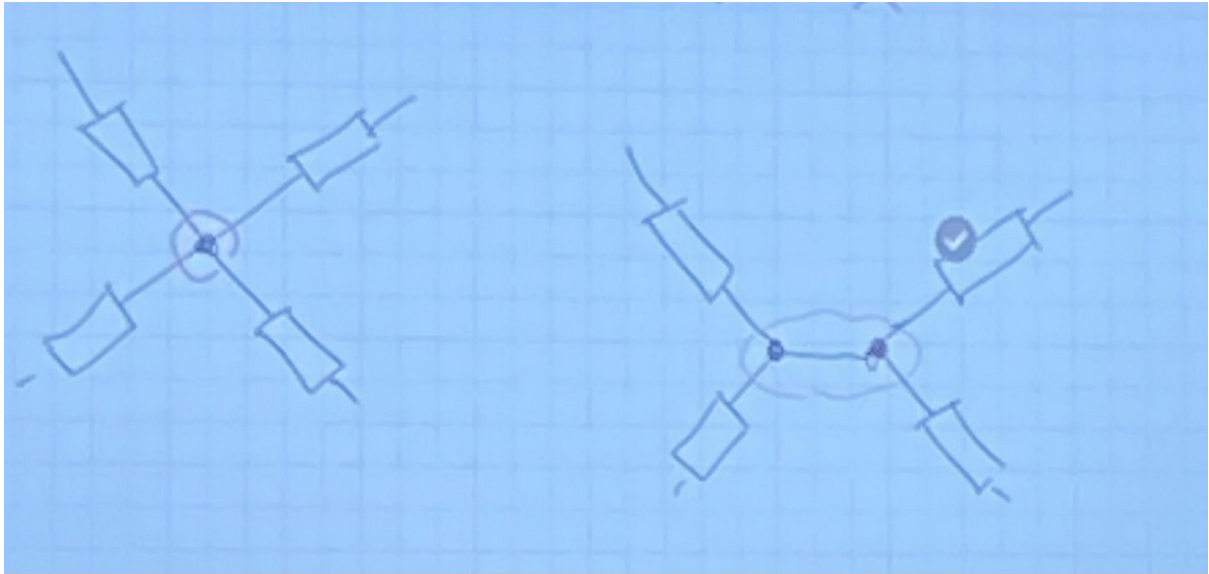
Il guadagno degli amplificatori (rapporto fra l'ampiezza del segnale in ingresso e quello in uscita o f.d.t) viene spesso espresso in decibel.

$$f.d.t._{dB} = 20 \cdot Log\left(\frac{V_{OUT}}{V_{IN}}\right)$$

Ad esempio: $\frac{V_{OUT}}{V_{IN}} = 2 \rightarrow \left(\frac{V_{OUT}}{V_{IN}}\right)_{dB} = 6dB$ $\quad \frac{V_{OUT}}{V_{IN}} = 100 \rightarrow \left(\frac{V_{OUT}}{V_{IN}}\right)_{dB} = 40dB$

$\frac{V_{OUT}}{V_{IN}} = 10 \rightarrow \left(\frac{V_{OUT}}{V_{IN}}\right)_{dB} = 20dB$ $\quad \frac{V_{OUT}}{V_{IN}} = 0.1 \rightarrow \left(\frac{V_{OUT}}{V_{IN}}\right)_{dB} = -20dB$

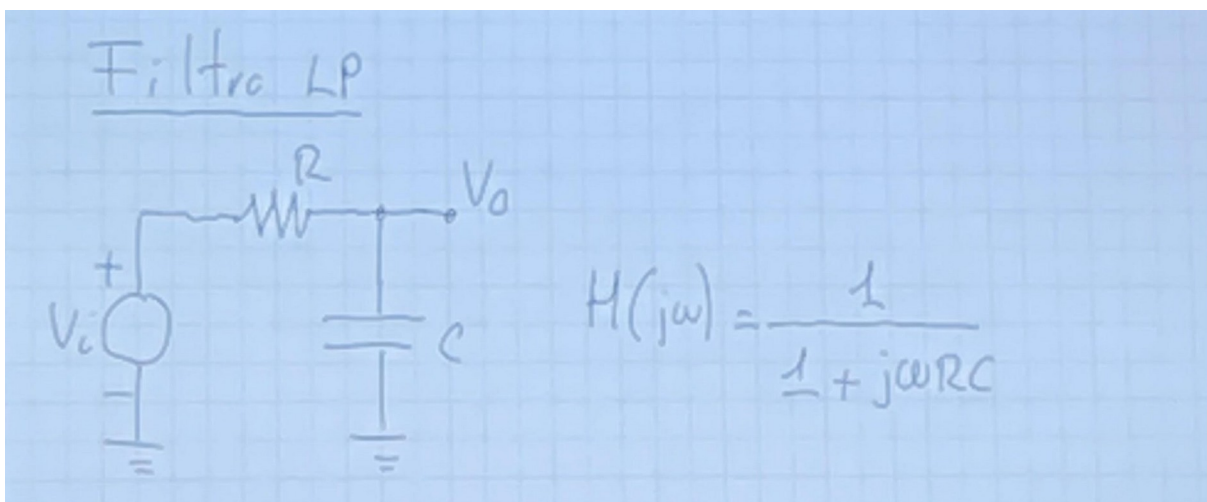
riassunto

per capire dove fare il bilancio di correnti devo trovare il nodo giusto:

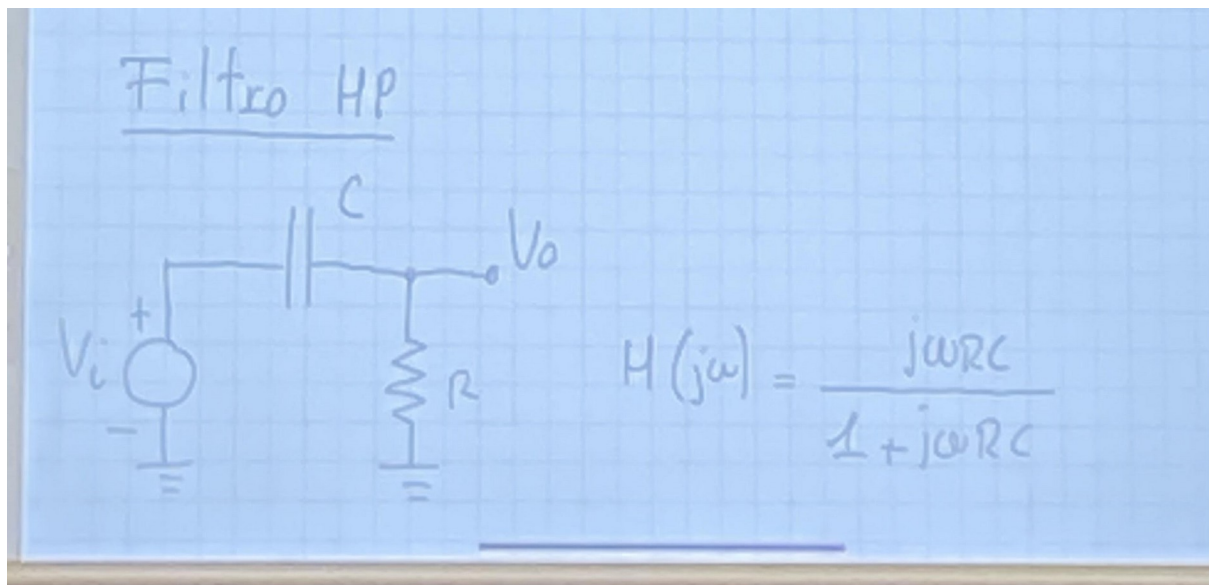
un nodo è un punto dove si uniscono correnti diverse

4 impedenze . qui c'è un solo nodo

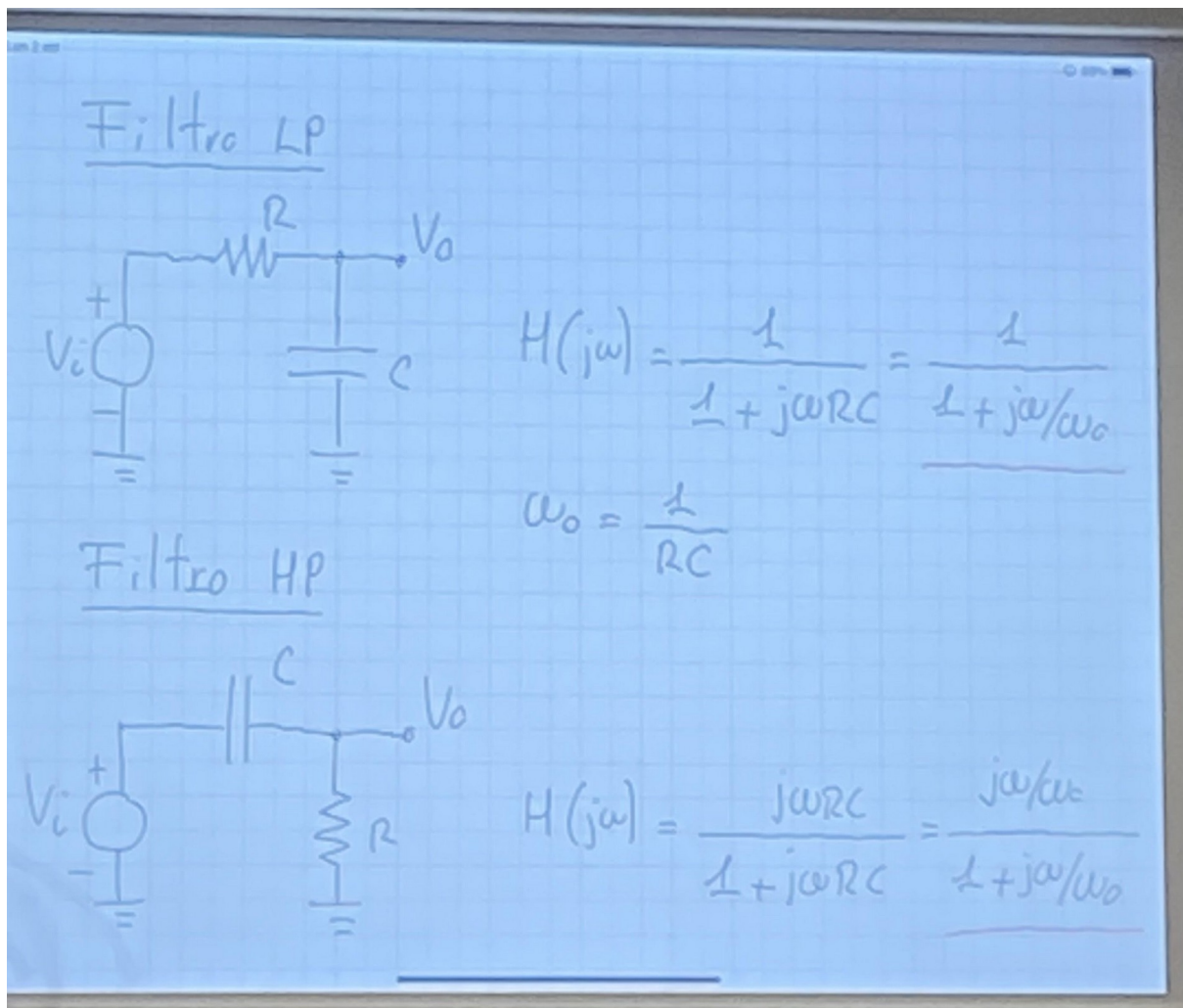
ci sono nodi dove <u>non</u> si possono fare bilanci di correnti che sono : le masse , agli estremi di un generatore di tensione e in uscita di un amplificatore

questo perchè questi dispositivi possono erogare una qualsiasi corrente

utilizzando impedenze diverse si creano due tipi di filtro : passa alto e passa basso

filtro passa basso

Z1 diventa una resistenza e Z2 è un condensatore

se inverto la posizione di resistenza e condensatore ottengo il filtro passa alto

la pulsazione caratteristica o di taglio : omega 0 = 1/ RC

quindi andando a sostituire ottengo c’è ci permette di non inserire nelle formule R e C

rappresentazione grafica che permette di vedere l’andamento

essendo un numero complesso non è possibile rappresentarlo.

dal numero complesso bisogna estrarre la fase e

diagramma di Bode

- modulo della funzione di trasferimento H (jw): modulo di H (jw) espresso in decibel in funzione della frequenza

- fase di H (jw): fase di H in funzione della frequenza

sono in scale logaritmiche

decibel:

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20 \log |H(j\omega)|$$

$$|H(j\omega)| = 10 \; ; \; 10 \; ; \; 1 \; ; \; 10 \; ; \; 100$$

$$|H(j\omega)|_{dB} = -40 \; ; \; -20 \; ; \; 0 \; ; \; 20 \; ; \; 40$$

$$\log \alpha^{\beta} = \beta \log \alpha$$

il logaritmo di 1 è 0

$$\log \alpha^{\beta} = \beta \log \alpha \; ; \; \log(\alpha \cdot \beta) = \log \alpha + \log \beta$$

$$\log(\alpha / \beta) = \log \alpha - \log \alpha$$

$$2 \rightarrow 6\,dB \; ; \; \sqrt{2} \rightarrow 3\,dB \; ; \; 1/\sqrt{2} \rightarrow -3\,dB$$

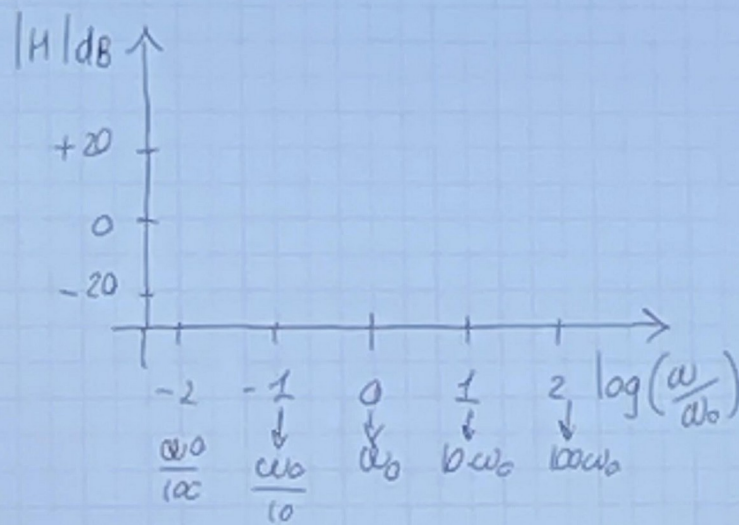
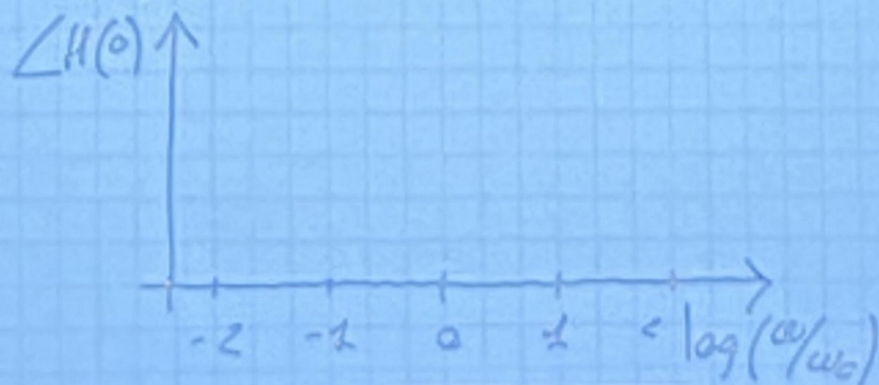
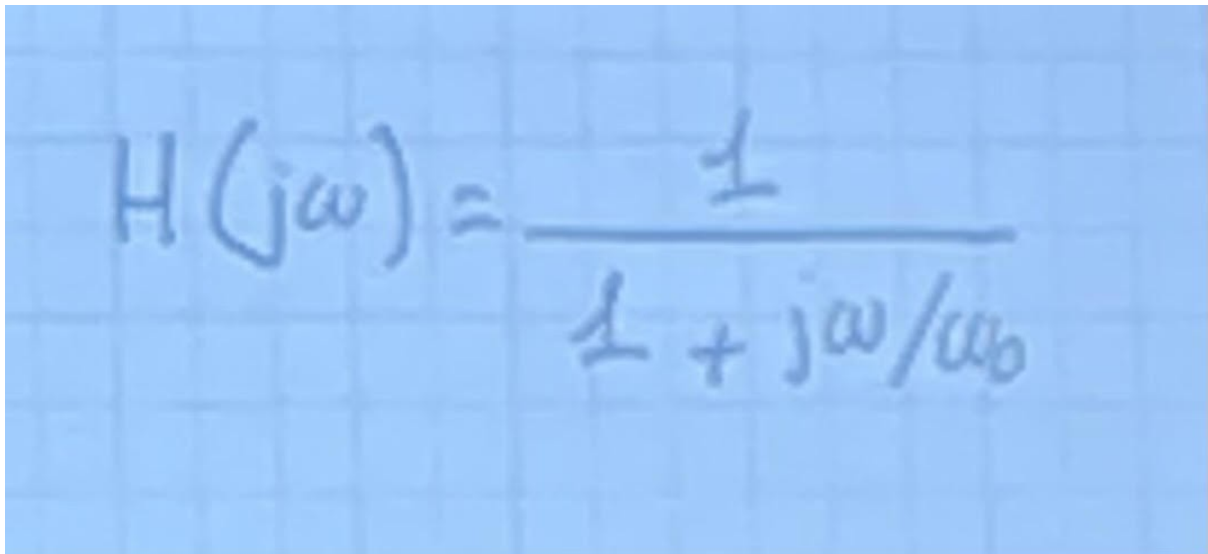
diagramma di Bode del Modulo

sull’asse x avremo il logaritmo di (w / w0) e ogni intervallo sull’asse x è detto decade

diagramma di Bode della Fase

uguale nell’asse x a quello del modulo

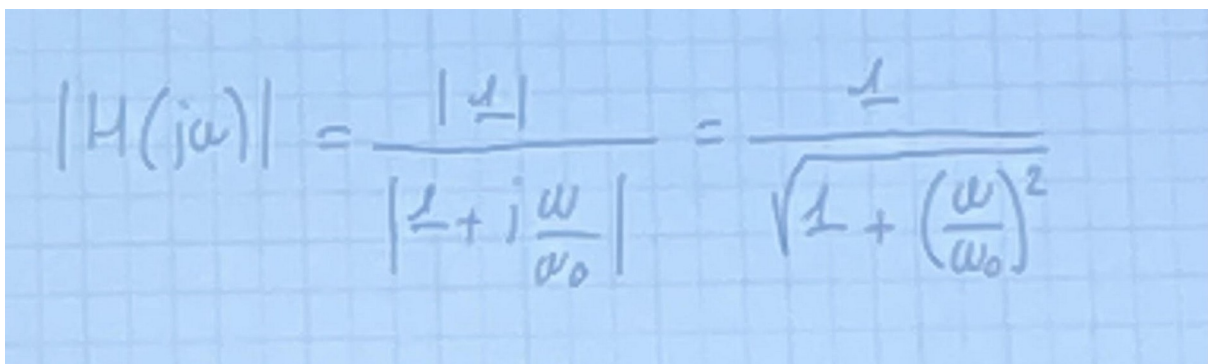
sull’asse y ho la fase riportata in gradi o radianti

[bisogna ricavere la funzione di trasferimento con leggi di krichoff o legge di ohm , individuare il nodo dove andare a fare il bilancio di correnti, poi si passa ad una rappresentazione grafica con i diagrammi di bode]

diagramma di bode per il filtro passa basso

la funzione di trasferimento H è data dal rapporto di un numero reale (1) e di un numero complesso (jw/w0)

modulo

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} =$$

$$= 20\left[\underset{=0}{\log 1} - \log\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\,\right] =$$

$$= -20 \log\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

devo passare in forma decibel

questo andamento va poi riportato sul grafico

si fa un’analisi del comportamente in funzione di w0 (pulsazione caratteristica)

$$|H(j\omega)|_{dB} = -20 \log\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \begin{cases} \omega \ll \omega_0 \\ \omega = \omega_0 \\ \omega \gg \omega_0 \end{cases}$$

se w << w0

$$① \quad -20\log\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \simeq -20\log 1 = 0 \qquad \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = 0$$

se w = w0

$$-20\log\underbrace{\sqrt{1+1^2}}_{\sqrt{2}} = -3dB$$

radice di 2 è - 3db

se w >> w0

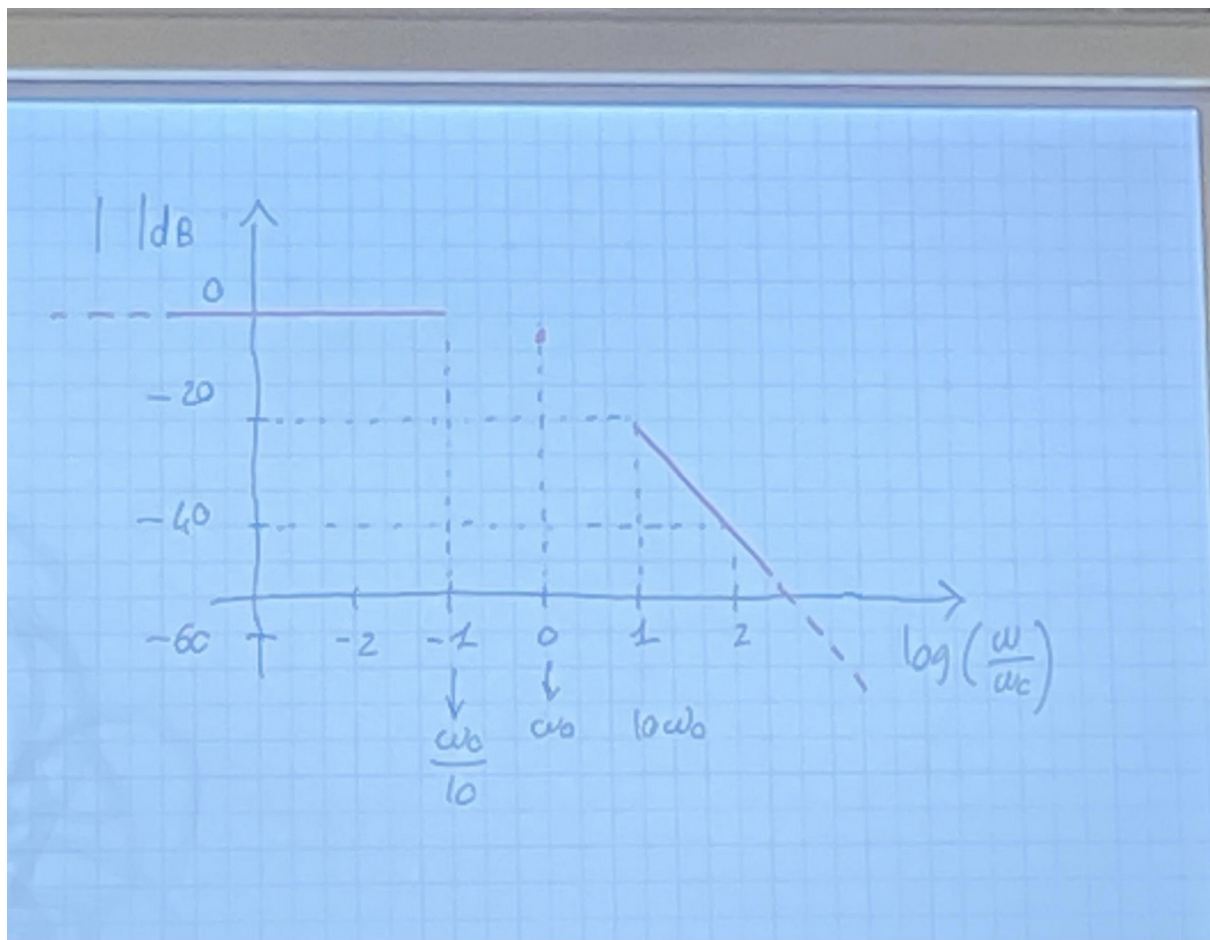
$$-20\log\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = -20\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

per molto maggiore e molto minore si intende almeno 10 volte più piccolo o più grande   (mi trovo ad una decade prima o dopo)

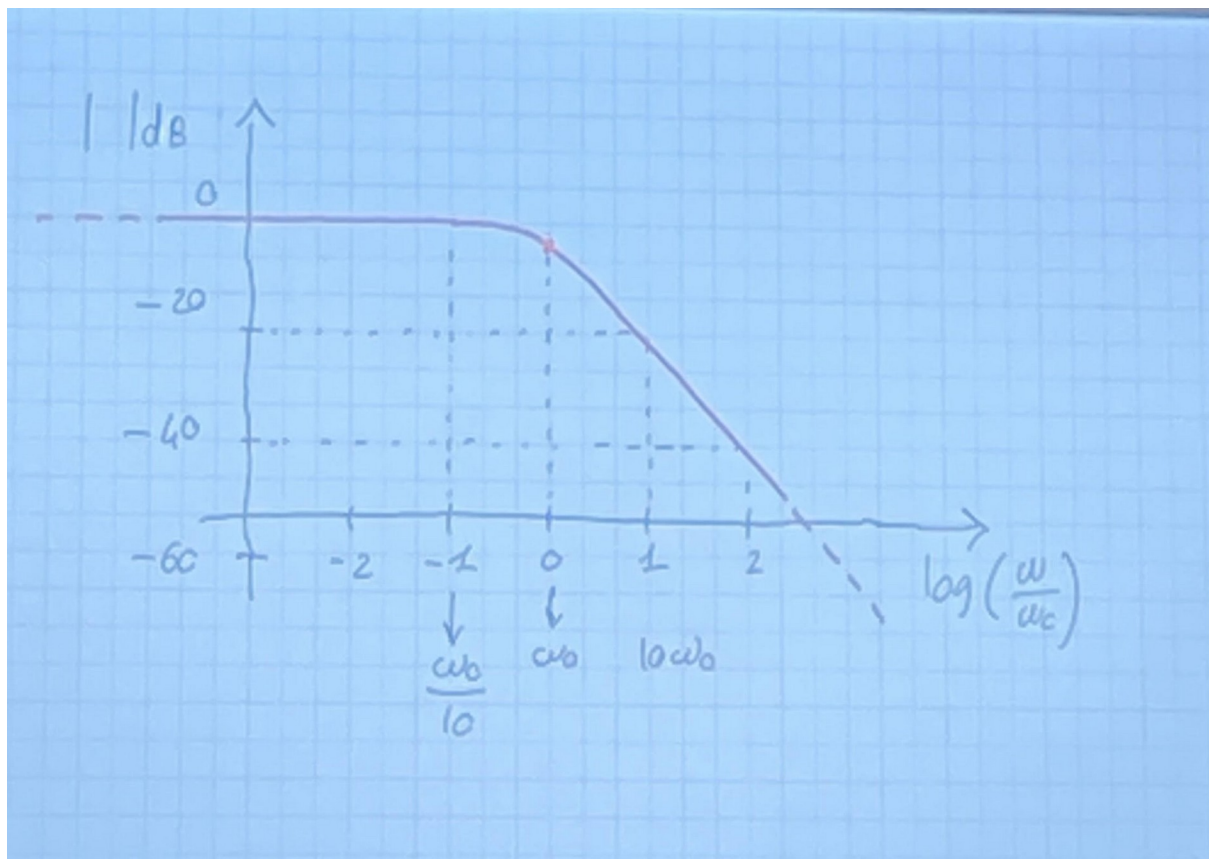
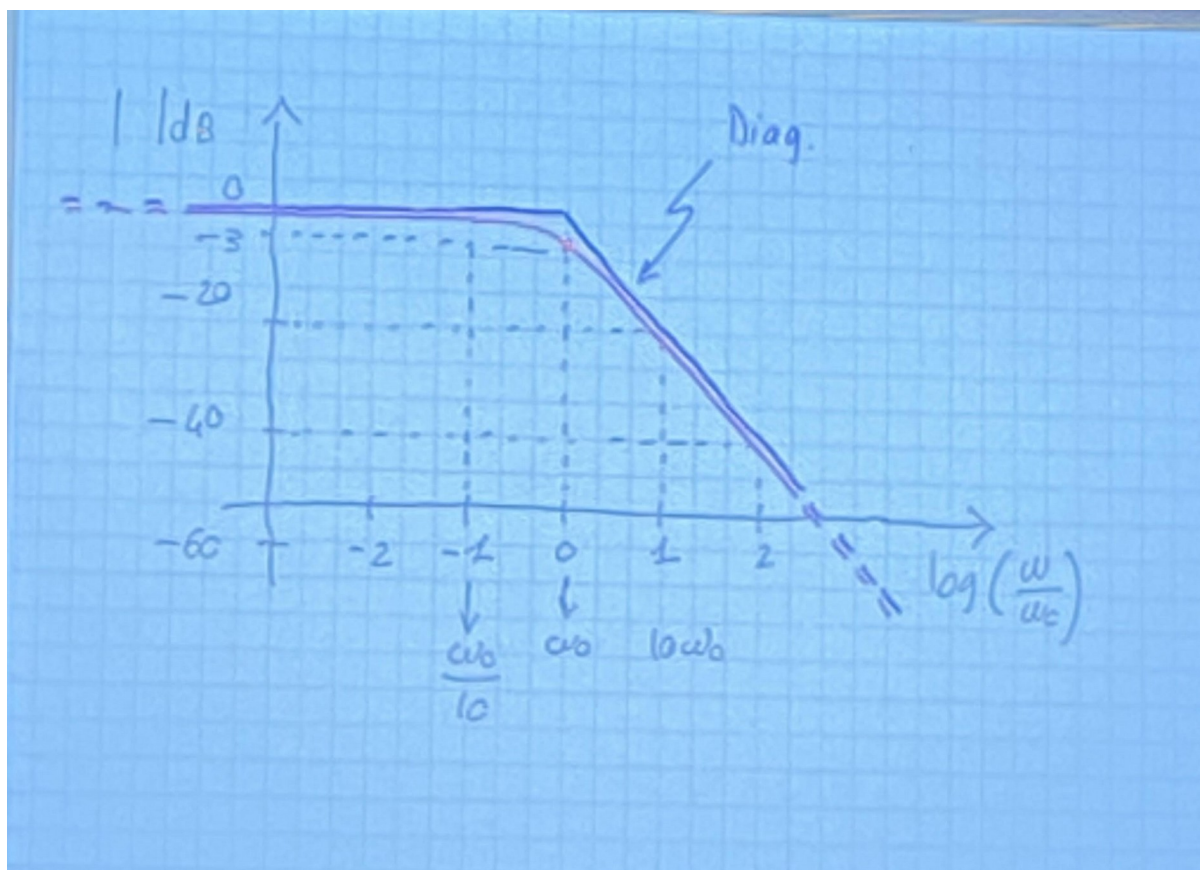
w0

ora si può tracciare il diagramma di bode

la parte interessante è in valori negativi per i decibel

vado ad inserire i valori calcolati per w<<w0 w=w0 e w>>w0

riporto una linea orizzontale fino ad una decade prima di w0

poi ho un punto su - 3db e l’andamento

come va in mezzo ? l’andamento si raccoglie

il guadagno è uno per le basse frequenze e tende a diminuire man mano che aumenta la frequenza

questo diagramma viene sostituito con una versione semplificata (diagramma asintotico) che ha per discriminante la pulsazione di taglio (considero il diagramma solo per w —> infinto e per w —> 0) e non considero ciò che sta una decade prima e una decade dopo w0.

errore maggiore w = w0 = 3db

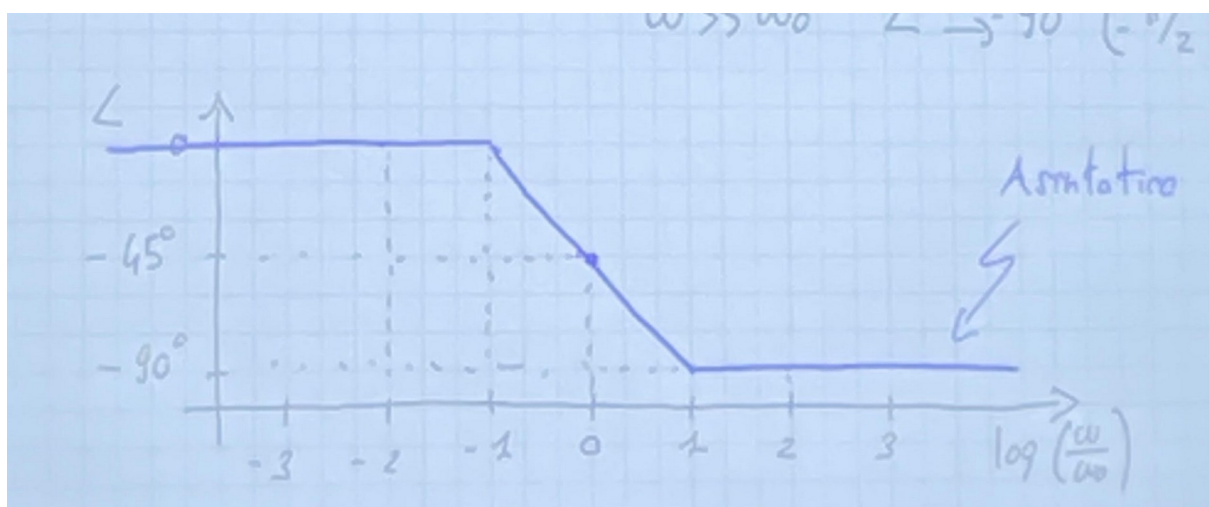
l’andamento ci dice che il modulo diminuisce con una pendenza di - 20 db (nella zona in basso a destra del grafico)

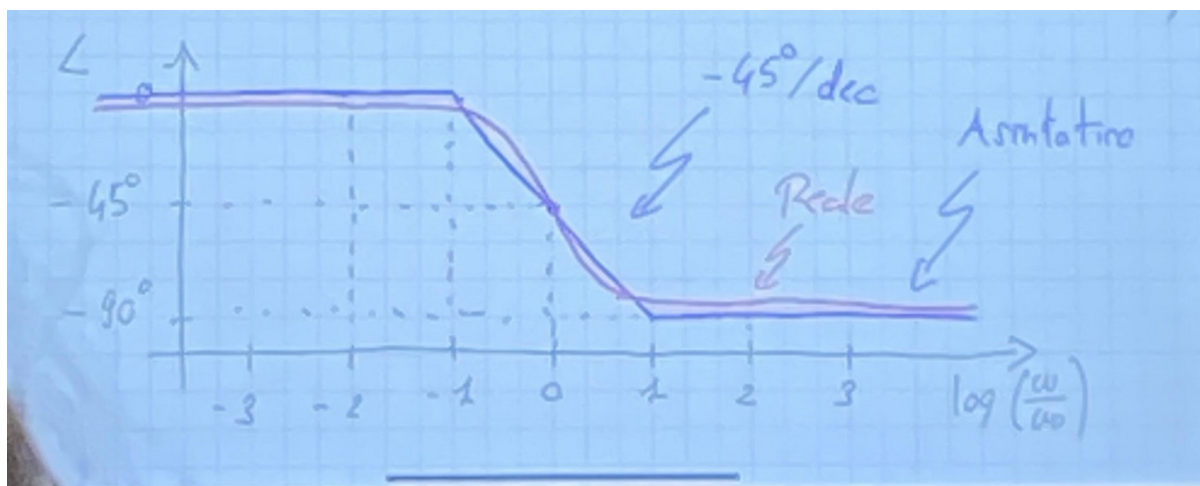
fase

Fase

$$\angle H(j\omega) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \begin{cases} \omega \ll \omega_0 & \angle \rightarrow 0 \\ \omega = \omega_0 & \angle \rightarrow -45^\circ \ (-\pi/4) \\ \omega \gg \omega_0 & \angle \rightarrow -90^\circ \ (-\pi/2) \end{cases}$$

grafico della fase

andamento asintotico

si considera sempre una decade prima di 0

andamento reale

ha una differenza di 2 decadi mentre in mezzo c'è un incrocio

viene sempre considerato il diagramma asintotico

la funzione del filtro passa alto può essere riscritta come :

$$H(j\omega)_{LP} = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_c}$$

$$H(j\omega)_{HP} = \frac{j\omega/\omega_0}{1 + j\omega/\omega_0}$$

$$= j\omega/\omega_0 \left(\frac{1}{1 + j\omega/\omega_0} \right)$$

una parte di funzione è uguale a quella del filtro passa basso . bisogna dunque solo capire quanto vale jw/w0